

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Électronique

PSI

Cours
Méthodes
Exercices résolus

P. BRENDERS • G. BUFFARD
L. DOUCHET • M. SAUZEIX
S. TISSERANT

Nouveau programme

 **Bréal**
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS



LES NOUVEAUX
Précis
BRÉAL

Électronique

PSI

P. BRENDERS

Professeur agrégé en classes préparatoires, Lyon

G. BUFFARD

Professeur agrégé de physique, Lyon

L. DOUCHET

Professeur agrégé en classes préparatoires, Lyon

M. SAUZEIX

Professeur agrégé en BTS électrotechnique, Lyon

S. TISSERANT

Professeur à l'École Supérieure d'Ingénieurs de Luminy

LES NOUVEAUX **Précis** B R É A L

Mathématiques 2^e année

- Algèbre et Géométrie / PSI
- Algèbre / PSI

Physique 2^e année

- Mécanique des fluides / PC-PSI
- Électromagnétisme / PC-PSI
- Physique des ondes / PC-PSI
- Électrotechnique / PSI
- Électronique / PSI
- Optique / MP-PC-PSI-PT
- Thermodynamique / PC-PSI

Chimie 2^e année

- Chimie / PSI

Exercices 2^e année

- Mathématiques / PSI
- Physique / PSI

Maquette et couverture : Sophie Martinet

Réalisation : Alpha-Édit



© Bréal 2005

Toute reproduction même partielle interdite.

ISBN 2 7495 0399 X

Les **Nouveaux Précis Bréal** sont conçus pour apporter aux étudiants en classes préparatoires **une aide efficace dans leur travail**. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année de la filière PSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.
- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.
- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos  ou ). La plupart des énoncés proposés ont été tirés de sujets de concours. Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer !

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de PSI disposeront, en électronique, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette seconde année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce nouveau Précis les aidera à passer avec réussite leurs épreuves, et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse suivante : infos@editions-breal.fr.

L'éditeur et les auteurs

This One



LFDA-3B3-QGUG

Sommaire

Chapitre 1 ■	Signaux et systèmes linéaires. Opérateurs de transfert	5
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	24
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	29
Chapitre 2 ■	Réponse indicielle d'un système linéaire	41
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	50
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	55
Chapitre 3 ■	Fonctions à amplificateurs opérationnels	67
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	96
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	101
Chapitre 4 ■	Fonction filtrage	123
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	146
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	152
Chapitre 5 ■	Les systèmes bouclés	193
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	211
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	215
Chapitre 6 ■	Oscillateurs quasi sinusoïdaux	235
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	264
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	272
Chapitre 7 ■	Comparateurs et oscillateurs à relaxation	297
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	320
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	324
Chapitre 8 ■	TP-cours : multiplication de signaux, applications	343
	<i>Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre</i>	361
	<i>Exercices : énoncés, solutions</i>	364
Index		381

Signaux et systèmes linéaires. Opérateurs de transfert

Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons plusieurs définitions utilisées dans la suite de ce livre. Avant de rappeler quelques notions importantes sur les fonctions de transfert, nous exposons rapidement le théorème de Fourier sur lequel repose l'intérêt de l'analyse harmonique des circuits.

Plan du chapitre 1

A. Signaux et systèmes	6
1. Notions de signal et de système	6
2. Exemples de signaux simples	6
3. Propriétés des systèmes	7
4. Circuits électriques linéaires	8
5. Équation différentielle et système linéaire invariant	9
B. Analyse de Fourier	10
1. Caractéristiques d'un signal périodique	10
2. Décomposition en série de Fourier	10
3. Spectre de Fourier et représentation fréquentielle	10
4. Synthèse fréquentielle d'un signal périodique	13
C. Opérateurs de transfert	14
1. Rappels	14
2. Équation différentielle et fonction de transfert harmonique	15
3. Notion de filtrage	16
4. Représentation des fonctions de transfert harmonique	18
5. Fonctions de transfert du deuxième ordre	19
6. Transformation de Laplace	21
<u>Méthodes</u>	
L'essentiel ; mise en œuvre	24
<u>Énoncés des exercices</u>	29
<u>Solutions des exercices</u>	31

A. Signaux et systèmes

A.1. Notions de signal et de système

La notion de signal est très vaste. En physique, nous appelons « signal » toute grandeur mesurable qui dépend quantitativement d'autres grandeurs mesurables telles que l'espace, le temps, la température, l'éclairement, etc. En général, un signal peut être modélisé par une fonction mathématique d'une ou plusieurs variables. Dans ce cours, nous nous intéressons aux signaux électriques variables avec le temps.

Par ailleurs, nous essayons souvent de modéliser un système en interaction avec l'extérieur ou avec d'autres systèmes en distinguant des entrées, un état et des sorties (fig. 1). À un instant donné, l'état du système peut dépendre de son histoire antérieure et des actions instantanées qu'il subit, les « entrées » représentant celles-ci. Une sortie peut représenter une action sur un autre système connecté au premier, mais il peut s'agir aussi d'une grandeur interne caractéristique de l'état du système. De manière générale, à tout instant, une sortie dépend de l'état du système et de l'état de chacune des entrées. Cette modélisation suppose donc que les entrées et les sorties fonctionnent comme des canaux *unidirectionnels*¹. Il faut d'autre part que le fonctionnement du système n'interfère pas avec le signal d'entrée.

Nous nous limitons aux systèmes dits *scalaires*, c'est-à-dire comportant une entrée et une sortie, notées respectivement $e(t)$ et $s(t)$ (fig. 2). Les quantités $e(t)$ et $s(t)$ sont des signaux et le système effectue un *traitement*. La sortie $s(t)$ est souvent appelée *réponse* du système à l'*excitation* $e(t)$.

Soit E l'ensemble des signaux d'entrée et S l'ensemble des signaux de sortie d'un système. Pour caractériser le comportement du système, nous notons F la transformation de E vers S qui fait passer du signal d'entrée $e(t)$ au signal de sortie $s(t)$, c'est-à-dire :

$$s(t) = F[e(t)].$$

A.2. Exemples de signaux simples

A.2.1 - Analyses fréquentielle et temporelle

Insistons sur le fait qu'un signal physique a nécessairement un début, souvent choisi comme origine temporelle pour le problème étudié. En outre, nous savons que la mise en équation de circuits contenant les dipôles étudiés en première année² conduit toujours à des équations différentielles, dont les solutions complètes sont les sommes de deux solutions. L'interprétation physique de celles-ci distingue le *régime permanent*, atteint après un certain temps, et le *régime transitoire*, qui caractérise l'évolution du système vers ce régime permanent.

En électronique, il existe deux manières complémentaires d'étudier un système : l'analyse *temporelle* consiste à étudier le comportement du circuit en régime transitoire, alors que l'analyse *fréquentielle* consiste à étudier la réponse du circuit en régime permanent sinusoïdal.

Nous présentons dans ce paragraphe quelques signaux qui permettent d'étudier et de caractériser le fonctionnement des systèmes. Le signal échelon intervient dans l'analyse temporelle des circuits. Les signaux sinusoïdaux interviennent dans l'analyse fréquentielle des circuits.

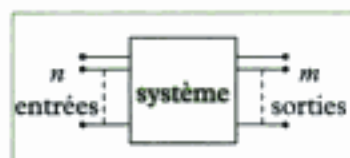


Fig. 1 - Modélisation d'un système physique.

1. C'est-à-dire, par exemple, que la manière dont est exploitée une sortie n'a pas d'influence sur le comportement du système étudié.



Fig. 2 - Système scalaire.

2. Tels que les sources de tension, les sources de courant, les résistances, les condensateurs, les bobines...

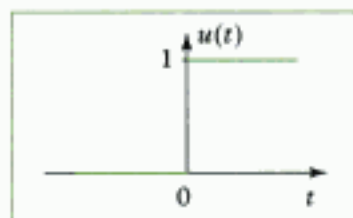


Fig. 3 - Échelon unité. La valeur instantanée pour $t = 0$ peut être définie ou non.

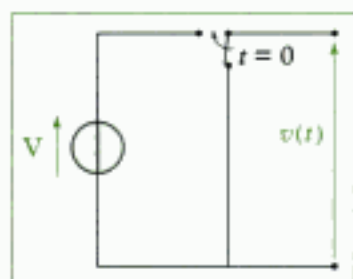


Fig. 4 - Réalisation d'un échelon.

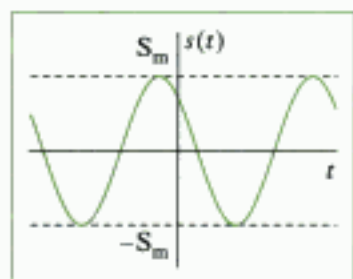


Fig. 5 - Représentation dans le domaine temporel d'un signal sinusoïdal.

A.2.2 - Échelon unité

Définition 1

Le signal **échelon unité**, de *Heaviside*, est défini par (fig. 3) :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \forall t < 0 \\ u(t) = 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$

La tension aux bornes du circuit représenté sur la figure 4, pour lequel l'inverseur bascule à l'instant $t = 0$, peut être modélisée comme :

$$v(t) = V \times u(t).$$

A.2.3 - Signal sinusoïdal

Définition 2

Un signal $s(t)$ est **sinusoïdal** si son évolution temporelle peut se mettre sous la forme (fig. 5) :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } S_m > 0.$$

– La grandeur S_m , exprimée en volt pour une tension ou en ampère pour un courant, est l'*amplitude* du signal.

– La quantité $\omega t + \varphi$ est la *phase* à l'instant t , ou *phase instantanée*, du signal. Elle s'exprime en radian (rad). La *phase à l'origine des temps*, ou *phase initiale*, est φ . Elle est définie modulo 2π .

– La grandeur ω , en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ou s^{-1} , est la *pulsation* du signal.

Une telle fonction sinusoïdale ne peut cependant pas décrire un signal physique, qui a nécessairement un début. Un signal plus réaliste, débutant à l'instant $t = 0$, peut être représenté par le produit d'un signal sinusoïdal avec la fonction échelon :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \times u(t).$$

Cette formulation est équivalente à :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \forall t < 0 \\ s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) & \forall t > 0 \end{cases}$$

A.3. Propriétés des systèmes

A.3.1 - Linéarité

Définition 3

Un système, caractérisé par la transformation F de E vers S , est **linéaire** si et seulement si l'opérateur F est linéaire¹.

A.3.2 - Invariance temporelle

Définition 4

Un système, caractérisé par la transformation F de E vers S , est **invariant** (ou **stationnaire**) si et seulement si une translation temporelle sur l'entrée entraîne la même translation sur la sortie :

$$\forall e \in E \text{ et } \forall \tau \in \mathbb{R}, s(t) = F[e(t)] \Rightarrow s(t - \tau) = F[e(t - \tau)].$$

Définition 5

Notons T_τ l'**opérateur retard** défini par :

$$T_\tau[x(t)] = x(t - \tau).$$

1. C'est-à-dire que la transformation F vérifie :

• $\forall e \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $F[\lambda e(t)] = \lambda F[e(t)]$

• $\forall (e_1, e_2) \in E^2$,

$F[e_1(t) + e_2(t)] = F[e_1(t)] + F[e_2(t)].$

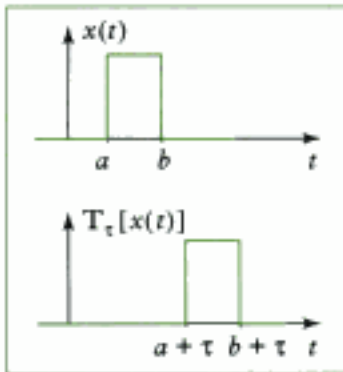


Fig. 6 - Action de l'opérateur retard.

La figure 6 illustre l'effet de l'opérateur retard sur un signal rectangulaire $x(t)$ non nul sur l'intervalle $[a, b]$. Le signal transformé $x(t - \tau)$ est non nul pour $a \leq t - \tau \leq b$, c'est-à-dire : $a + \tau \leq t \leq b + \tau$. Le signal est retardé de τ , puisqu'il intervient plus tard dans le temps.

Si un système est invariant, nous avons :

$$\forall e \in E \text{ et } \forall \tau \in \mathbb{R}, T_\tau\{F[e(t)]\} = F\{T_\tau[e(t)]\}.$$

La transformation F commute avec toutes les translations temporelles.

A.3.3 - Causalité

En physique, un effet ne peut jamais précéder sa cause. Un système est dit *causal* s'il respecte ce principe fondamental. Pour un tel système, si le signal d'entrée $e(t)$ est nul pour $t < 0$, il en est de même pour le signal de sortie induit $s(t)$.

A.3.4 - Stabilité

Il existe plusieurs définitions de la stabilité. Nous proposons la suivante :

Définition 6

Un système linéaire invariant est **stable** si le signal de sortie s tend vers 0 lorsque le signal d'entrée e est supprimé.

A.4. Circuits électriques linéaires

A.4.1 - Régimes transitoire et permanent

Considérons un circuit RLC série (fig. 7) alimenté par un générateur de tension variable délivrant une tension $e(t)$. Nous cherchons à déterminer l'évolution temporelle de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

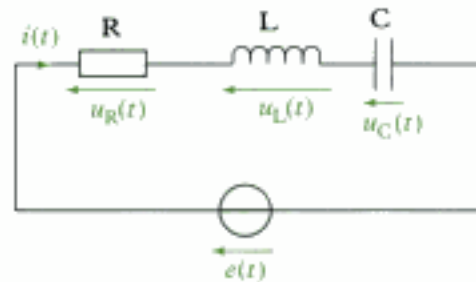


Fig. 7 - Étude de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série.

1. Cette équation a été établie dans le cours de première année. Remarquons qu'elle est indépendante de la forme de la tension $e(t)$ délivrée par le générateur : elle est, par exemple, valable pour une tension continue, un échelon ou une tension sinusoïdale.

2. Un tel système est stable.

La mise en équation de ce circuit conduit à l'équation différentielle¹ :

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t).$$

En mathématiques, nous savons que la solution d'une telle équation peut s'écrire comme la somme de deux fonctions :

- la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) ;
- une solution particulière de l'équation complète.

La solution de l'équation homogène caractéristique de l'évolution du circuit en dehors de toute excitation est appelée *réponse libre*. Elle dépend des valeurs des paramètres R , L et C , mais dans tous les cas, elle tend vers 0 lorsque le temps devient infini². Physiquement, cela signifie qu'elle peut être négligée après un certain temps et que seule subsiste alors la solution particulière de l'équation complète. Celle-ci correspond à la *réponse forcée* ou au *régime permanent*.

1. Cela peut se modéliser en écrivant la tension du générateur sous la forme :

$$e(t) = Eu(t),$$

$u(t)$ étant la fonction échelon.

Choisissons, par exemple, comme origine des temps, l'instant de fermeture du circuit¹. Si nous étudions l'évolution de la solution complète en fonction du temps (pour $t > 0$), nous distinguons deux régimes, le *régime transitoire* correspondant à la durée pendant laquelle la réponse libre n'est pas négligeable devant la réponse forcée. Le système évolue transitoirement de son état initial vers le régime permanent, qui met un certain temps pour s'établir après la fermeture de l'interrupteur.

A.4.2 - Quadripôles

Essayons d'appliquer la notion de système, introduite au début de ce chapitre, au circuit RLC série. La tension $e(t)$ du générateur peut être assimilée au signal d'entrée et la tension cherchée $u_C(t)$ au signal de sortie, le système étant constitué par les trois dipôles R, L et C. La schématisation du circuit sur la figure 8 met en évidence ce système.

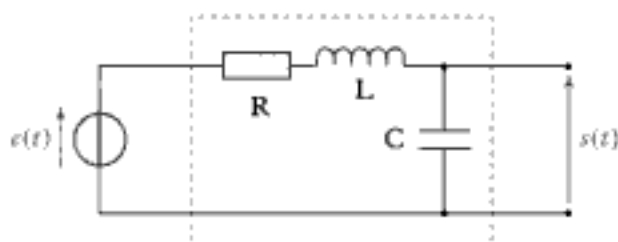


Fig. 8 - Modélisation du circuit RLC comme un système avec une entrée et une sortie.

Le système ainsi matérialisé est un quadripôle, ce qui est généralement le cas en électronique, car les signaux physiques d'entrée et de sortie sont caractérisés en pratique par leur énergie. En électronique, un signal est donc caractérisé par ses deux *composantes duales* : tension et intensité.

A.5. Équation différentielle et système linéaire invariant

Le résultat précédent obtenu avec le circuit RLC peut se généraliser en électronique. L'équation reliant les signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ d'un quadripôle constitué de composants dont chaque caractéristique peut être modélisée² par une équation différentielle linéaire à coefficients constants (sources de tension, sources de courant, résistances, bobines, condensateurs, etc.) est également une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}.$$

Cette équation ne dépend que du circuit, mais pas de la nature du signal $e(t)$ appliqué en entrée.

Il est facile de montrer qu'un **système gouverné par une équation différentielle à coefficients constants est linéaire et invariant**³. En effet, cette propriété est une conséquence directe de la linéarité et de l'invariance des équations différentielles à coefficients constants.

2. Cette modélisation peut n'être valable que pour un domaine restreint de fonctionnement. C'est le cas, par exemple, pour l'amplificateur opérationnel.

3. En revanche, la réciproque est fautive. Considérons par exemple l'opérateur retard T_a :

$$s(t) = T_a[e(t)] = e(t - a).$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'un opérateur linéaire et invariant. L'entrée et la sortie d'un tel système ne sont cependant pas reliées par une équation différentielle.

B. Analyse de Fourier

B.1. Caractéristiques d'un signal périodique

Définition 7

Un signal $s(t)$ est **périodique**¹ s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux :

$$\exists T \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, \text{ on a : } s(t+T) = s(t).$$

L'intervalle de temps *minimal* nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction est la *période* T . La *fréquence* f du signal est l'inverse de la période T :

$$f = \frac{1}{T}, \text{ avec } f \text{ en hertz (Hz) si } T \text{ en seconde (s).}$$

La *valeur moyenne* S d'un signal périodique, exprimée dans la même unité que le signal, est par définition calculée sur un intervalle dont la largeur est égale à une période² :

$$S = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(u) du = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt.$$

Le carré de la *valeur efficace* S_{eff} d'un signal périodique est par définition égal à la valeur moyenne du carré de ce signal :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}.$$

B.2. Décomposition en série de Fourier

L'étude des signaux sinusoïdaux est essentielle, car le théorème de Fourier³ permet de décomposer tout signal périodique en une somme de signaux sinusoïdaux.

Théorème 1

Toute fonction réelle $s(t)$ périodique, de fréquence f , peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \text{ avec } \omega = 2\pi f.$$

Les coefficients a_n et b_n sont réels tels que :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

Définition 8

La constante a_0 est la **composante continue** du signal périodique.

Les fréquences des composantes sinusoïdales sont des multiples de la fréquence f du signal périodique décomposé.

1. Le commentaire sur la réalité physique d'un signal sinusoïdal (5 A.2.4) peut être appliqué à l'identique à tout signal périodique. Un signal réel n'a d'existence qu'à partir d'un instant particulier.

2. L'intégrale ne dépend pas de l'intervalle choisi. Un changement de variable permet de se ramener à $[0, T]$, ce qui allège ici les écritures, mais il est possible de choisir un autre intervalle selon le cas étudié.

3. Dont les hypothèses (fonction bornée, nombre fini de discontinuités sur une période) sont toujours vérifiées en physique.

Définition 9

- La fréquence $f_1 = f$ correspond au **fondamental**, ou *premier harmonique* ($n = 1$).
- La fréquence $f_n = nf$ correspond à l'**harmonique d'ordre n** ($n > 1$).

La formulation précédente de la décomposition de Fourier permet un calcul direct des coefficients a_n et b_n . Il est cependant possible d'écrire la décomposition de Fourier en regroupant les deux composantes de chaque harmonique. En effet, on a toujours :

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = c \cos(\omega t + \varphi)$$

car :

$$c \cos(\omega t + \varphi) = c[\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi]$$

et par identification :

$$a = c \cos \varphi \quad \text{et} \quad b = -c \sin \varphi.$$

Nous pouvons choisir c positif (comme une amplitude), les quantités c et φ étant alors définies par :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

d'où l'écriture équivalente pour la décomposition de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

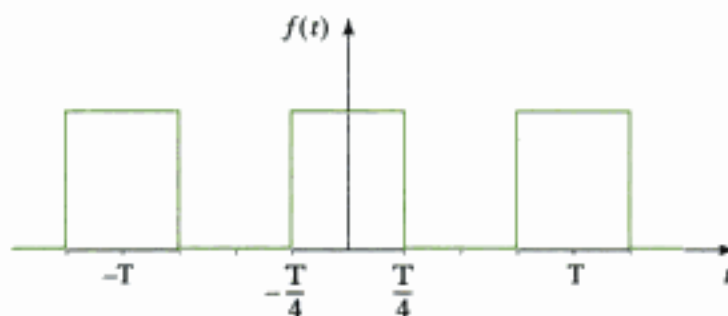
expression que l'on peut généraliser sous la forme :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \quad \text{avec : } c_0 = |a_0| \quad \text{et} \quad \cos \varphi_0 = \text{signe}(a_0).$$

Application 1 Décomposition de Fourier d'un créneau de rapport cyclique un demi

Soit un créneau, d'amplitude A et de période T , défini par une succession périodique d'impulsions rectangulaires de hauteur A et de largeur $\frac{T}{2}$. L'origine des temps est choisie de manière à ce que le signal soit une fonction $f(t)$ paire. Calculer les coefficients a_n et b_n de la décomposition de Fourier.

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \forall t \in \left[-\frac{T}{2}; -\frac{T}{4}\right[\\ f(t) = A & \forall t \in \left[-\frac{T}{4}; \frac{T}{4}\right] \\ f(t) = 0 & \forall t \in \left]\frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$



Solution

Pour le calcul des coefficients a_n et b_n , nous choisissons par commodité la période centrée sur 0 :

$$\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right].$$

– Commençons par calculer la valeur moyenne a_0 du signal :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A dt = \frac{AT}{T} = \frac{A}{2}.$$

– Calculons les coefficients a_n pour $n > 0$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/4}^{T/4}$$

ce qui donne :

$$a_n = \frac{4A}{n\omega T} \sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right).$$

Comme $\omega T = 2\pi$, il vient :

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ a_n = \frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n = 4k + 1 \\ a_n = -\frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n = 4k + 3 \end{cases}$$

– De même, calculons les coefficients b_n pour $n > 0$:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \sin(n\omega t) dt = \left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-T/4}^{T/4} = 0.$$

Les coefficients b_n sont donc tous nuls.

B.3. Spectre de Fourier et représentation fréquentielle

La décomposition de Fourier d'une fonction périodique $s(t)$ peut se résumer sous la forme de deux suites infinies de coefficients :

$$\{c_n\}_{n \geq 0} \quad \text{et} \quad \{\varphi_n\}_{n \geq 0}.$$

Ces suites constituent le **spectre de Fourier** du signal $s(t)$, comprenant un spectre d'amplitude $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et un spectre de phase $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$. Il est nécessaire de connaître les deux spectres pour reconstituer le signal $s(t)$.

Chacun de ces spectres peut être représenté graphiquement par un ensemble de raies verticales ayant pour abscisse la valeur de la fréquence f_n de l'harmonique représenté et pour hauteur l'amplitude c_n ou la phase φ_n . Les deux représentations des spectres d'amplitude et de phase constituent la **représentation fréquentielle du signal**.

Cette décomposition est analogue à l'analyse de la lumière à l'aide d'un prisme, c'est pourquoi l'analyse de Fourier d'un signal périodique est également appelée *analyse spectrale*. La représentation de Fourier d'un signal sinusoïdal est extrêmement simple, chaque spectre comportant une seule raie. Toujours par analogie avec les ondes lumineuses, un signal sinusoïdal est parfois qualifié de *monochromatique*, sa décomposition de Fourier se limitant alors au fondamental.

Application 2 Spectre de Fourier d'un créneau de rapport cyclique un demi

Représenter le spectre d'amplitude du créneau étudié dans l'application n° 1.

Solution

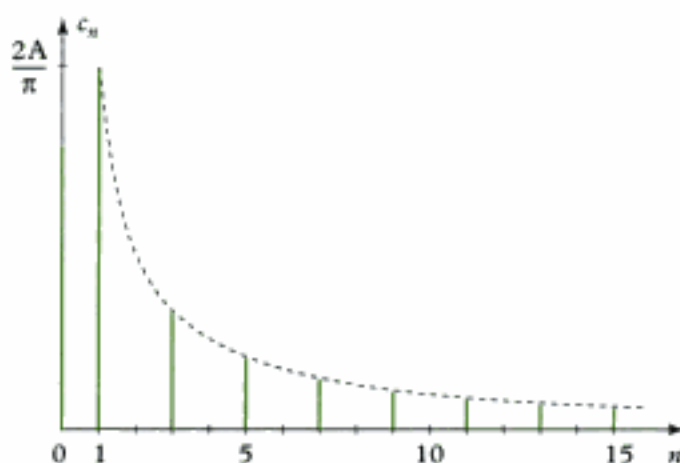
La décomposition de Fourier du créneau étudié à l'application n° 1 est :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{A}{2} & \text{et} & a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) & \forall n > 0 \\ b_n = 0 & & \forall n > 0 \end{cases}$$

Nous pouvons alors calculer les coefficients c_n :

$$c_0 = |a_0| = \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| \Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ a_n = \frac{2A}{n\pi} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

Seuls les harmoniques **impairs** sont présents dans le spectre, leur amplitude décroissant en $\frac{1}{n}$.



B.4. Synthèse fréquentielle d'un signal périodique

En toute rigueur, il faut un nombre infini d'harmoniques pour reconstituer un signal périodique à partir de sa série de Fourier. Cependant, en pratique, l'amplitude c_n des harmoniques décroît lorsque n augmente. Il est donc possible d'obtenir une approximation du signal en tronquant sa série de Fourier jusqu'à un certain rang (fig. 9 et 10). De manière évidente, l'approximation s'améliore lorsque le nombre d'harmoniques pris en compte augmente¹.

1. Ici, cependant, la synthèse d'un créneau nécessite un nombre élevé d'harmoniques, car il comporte deux discontinuités difficiles à reproduire avec des fonctions sinusoïdales.

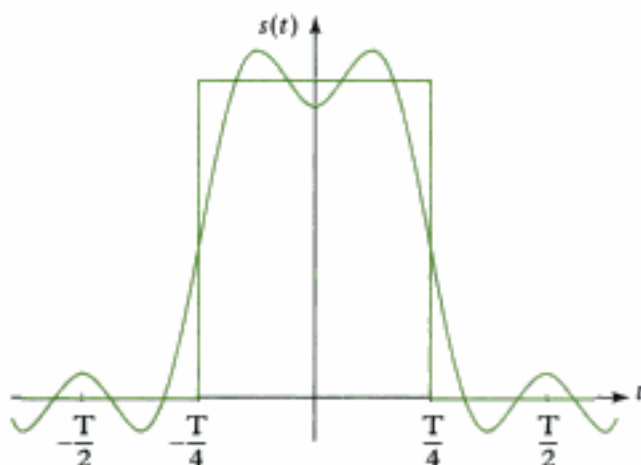


Fig. 9 - Synthèse d'un créneau en conservant jusqu'à l'harmonique de rang 3.

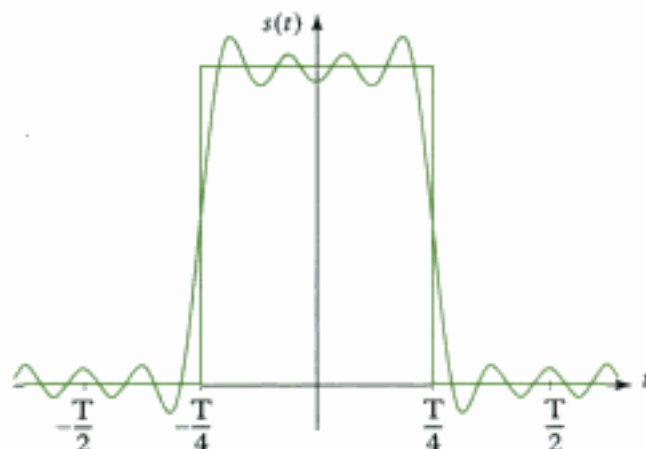


Fig. 10 - Synthèse d'un créneau en conservant jusqu'à l'harmonique de rang 7.

C. Opérateurs de transfert

C.1. Rappels

C.1.1 - Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

À tout signal sinusoïdal $s(t)$ d'amplitude S_m et de phase instantanée $\omega t + \varphi$, correspond un signal complexe défini par¹ :

$$\underline{s}(t) = S_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = S_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

L'amplitude complexe $S = S_m e^{j\varphi}$, indépendante du temps, contient les informations sur l'amplitude et la phase initiale du signal réel.

Un intérêt majeur de la notation complexe est de simplifier, en régime sinusoïdal forcé, la résolution des équations différentielles qui gouvernent le fonctionnement de certains systèmes linéaires. Dérivons le signal complexe $\underline{s}(t)$ associé au signal sinusoïdal réel $s(t)$:

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = S_m j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} = S_m \omega e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j(\omega t + \varphi)} = S_m \omega e^{j(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})}.$$

Nous constatons que la dérivation du signal complexe est équivalente à une multiplication par la quantité $p = j\omega$:

$$\frac{d\underline{s}(t)}{dt} = j\omega \underline{s}(t).$$

Plus généralement, la dérivée n -ième d'un signal complexe peut être remplacée par une multiplication par la quantité $p^n = (j\omega)^n$. Une équation différentielle d'ordre n fait alors apparaître un polynôme de degré n en p .

C.1.2 - Fonction de transfert harmonique

Considérons le quadripôle de la figure 11. En régime sinusoïdal permanent, notons $\underline{e}(t)$ et $\underline{s}(t)$ les grandeurs complexes associées aux tensions en entrée et en sortie respectivement.

Définition 10

En régime sinusoïdal permanent, la **fonction de transfert harmonique**² $H(j\omega)$ d'un circuit est définie comme le rapport, en notation complexe, de la tension de sortie par la tension d'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}, \text{ avec } \omega \text{ pulsation du signal d'entrée.}$$

1. Le nombre j représente l'imaginaire pur, tel que $j^2 = -1$ et noté i en mathématiques. Nous avons aussi :

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

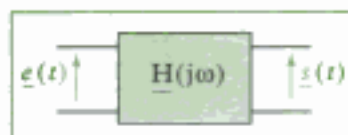


Fig. 11 - Notations associées à la définition de la fonction de transfert d'un quadripôle.

2. Aussi appelée transmittance complexe.

Notons $H(\omega)$ le module de la fonction de transfert et $\phi(\omega)$ son argument :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{i\phi(\omega)}.$$

Ils représentent respectivement le rapport des amplitudes des signaux et l'avance de phase du signal de sortie par rapport au signal d'entrée¹.

C.2. Équation différentielle et fonction de transfert harmonique

Soit un système pour lequel les signaux en entrée et en sortie, notés respectivement $e(t)$ et $s(t)$, sont reliés par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}.$$

Nous supposons que le signal imposé en entrée est un signal sinusoïdal de pulsation ω et que le régime permanent est atteint. Cela revient à dire que nous cherchons une solution particulière à l'équation complète sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation.

En représentation complexe, cette équation différentielle s'écrit alors :

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k \underline{s} = \sum_{k=0}^m b_k p^k \underline{e}, \text{ avec } p = j\omega,$$

d'où la fonction de transfert harmonique du système :

$$H(p) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

La fonction de transfert harmonique d'un système linéaire gouverné par une équation différentielle apparaît comme une fraction rationnelle de deux polynômes en $p = j\omega$: $N(p)$ au numérateur et $D(p)$ au dénominateur. Le degré du dénominateur est l'ordre du filtre.

Inversement, si la fonction de transfert est connue² sous la forme d'une fraction rationnelle de polynômes, il est possible de retrouver l'équation différentielle qui gouverne le système. En effet :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \Leftrightarrow D(p) \underline{s}(t) = N(p) \underline{e}(t).$$

En remplaçant chaque terme p^k par la dérivée k -ième par rapport au temps de $e(t)$ ou $s(t)$, nous obtenons l'équation différentielle du système.

1. L'analyse fréquentielle d'un circuit consiste principalement dans la détermination de sa fonction de transfert harmonique, puis en l'étude de son module $H(\omega)$ et de son argument $\phi(\omega)$, en fonction de la pulsation ou de la fréquence.

2. Il existe diverses méthodes pour connaître la fonction de transfert d'un système. Elle peut, par exemple, être calculée en utilisant le formalisme des impédances complexes. Dans d'autres cas, elle peut être caractérisée expérimentalement.

Application 3 Passage de la fonction de transfert à l'équation différentielle

On considère un système dont la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \text{ avec } p = j\omega.$$

Déterminer l'équation différentielle reliant l'entrée et la sortie de ce système.

Solution

En développant l'expression de la transmittance complexe, nous avons :

$$H(p) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{p + \lambda}{p^2 + 2\lambda p + \lambda^2 + \omega^2},$$

ce qui donne :

$$(p^2 + 2\lambda p + \lambda^2 + \omega^2) \underline{s}(t) = (p + \lambda) \underline{e}(t)$$

d'où l'équation différentielle cherchée :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds(t)}{dt} + (\lambda^2 + \omega^2)s(t) = \frac{de(t)}{dt} + \lambda e(t).$$

C.3. Notion de filtrage

C.3.1 - Filtrage par un système linéaire

• Soit un système linéaire caractérisé par sa fonction de transfert harmonique $H(j\omega)$, de module $H(\omega)$ et d'argument $\phi(\omega)$. Si ce système est soumis en entrée à un signal sinusoïdal $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$, le signal en sortie, lorsque le régime permanent est atteint, est un signal sinusoïdal de même pulsation :

$$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi').$$

Les amplitudes et les phases à l'origine sont telles que :

$$S = H(\omega)E \quad \text{et} \quad \varphi' = \varphi + \phi(\omega).$$

• Si ce système linéaire est soumis en entrée à un signal périodique quelconque $f(t)$ de période T , nous pouvons décomposer celui-ci en une série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n), \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

La linéarité du système nous permet de déterminer sa réponse $g(t)$ comme la superposition des réponses individuelles aux diverses composantes du signal d'entrée. Ce qui peut s'écrire :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} H(n\omega) c_n \cos[n\omega t + \phi_n + \phi(n\omega)].$$

Le spectre de Fourier du signal en sortie comporte donc le même fondamental et les mêmes harmoniques que le signal d'entrée. En revanche, les amplitudes et les phases sont modifiées. Les spectres d'amplitude et de phase contiennent donc le même nombre de raies aux mêmes emplacements, mais les hauteurs algébriques de ces raies sont *a priori* différentes. Certaines raies peuvent même disparaître si $H(n\omega)$ est nul. On dit que le système linéaire effectue un filtrage en fréquences.

Propriété 1

Le spectre du signal en sortie d'un **filtre linéaire** comporte le même fondamental et les mêmes harmoniques que le spectre du signal d'entrée. Leurs amplitudes peuvent cependant être modifiées par le filtre (amplifiées, atténuées, voire annulées).

C.3.2 - Action d'un système non-linéaire

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la réponse d'un système non-linéaire soumis à un signal sinusoïdal $e(t)$ en entrée. La réponse ne peut pas se mettre sous la forme $\underline{s}(t) = \underline{H}(j\omega)\underline{e}(t)$, mais par exemple :

$$\underline{s}(t) = \underline{H}[j\omega, \underline{e}(t)]\underline{e}(t).$$

Supposons que nous pouvons modéliser l'écart à la linéarité de la fonction de transfert sous une forme polynomiale :

$$\underline{H}[j\omega, \underline{e}(t)] = \underline{H}_1(j\omega) + \underline{H}_2(j\omega)\underline{e}(t) + \dots + \underline{H}_n(j\omega)\underline{e}^{n-1}(t),$$

les fonctions complexes $\underline{H}_n(j\omega)$ ayant des dimensions telles que chaque terme de la somme reste homogène à une fonction de transfert. On a alors :

$$\underline{s}(t) = \underline{H}_1(j\omega)\underline{e}(t) + \sum_{k=1}^n \underline{H}_k(j\omega)\underline{e}^k(t),$$

c'est-à-dire :

$$\underline{s}(t) = H_1(\omega)E e^{j(\omega t + \varphi + \phi_1)} + \sum_{k=1}^n H_k(\omega)E^k e^{j(k\omega t + k\varphi + \phi_k)},$$

soit en prenant la partie réelle :

$$s(t) = H_1(\omega)E \cos(\omega t + \varphi + \phi_1) + \sum_{k=1}^n H_k(\omega)E^k \cos(k\omega t + k\varphi + \phi_k).$$

Cette expression ressemble à une décomposition de Fourier. Le signal en sortie n'est donc pas sinusoïdal, même s'il reste périodique de même fréquence que le signal sinusoïdal en entrée. La non-linéarité du système introduit dans la réponse une série d'harmoniques.

La saturation d'un circuit (par exemple, d'un A.O.) constitue un autre cas de non-linéarité. Supposons que nous observions en sortie d'un circuit un signal sinusoïdal tronqué entre deux valeurs $-V_{\text{sat}}$ et $+V_{\text{sat}}$ (fig. 12). Ce signal reste périodique, mais n'est pas une sinusoïde. Il peut donc être décomposé en série de Fourier et nous voyons à nouveau apparaître des harmoniques.

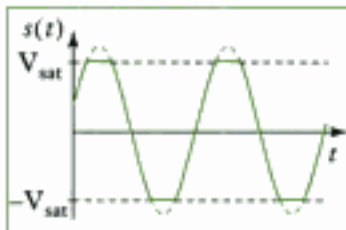


Fig. 12 - Exemple de saturation d'un circuit.

Propriété 2

Le spectre du signal en sortie d'un filtre non-linéaire comporte toujours **plus d'harmoniques** que le spectre du signal d'entrée. Un filtre non-linéaire enrichit le spectre de Fourier.

De manière générale, l'effet de la non-linéarité d'un système est quantifié par le taux de distorsion basé sur la décomposition de Fourier de la réponse de ce système à un signal sinusoïdal de pulsation ω en entrée :

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Définition 11

Le **taux de distorsion D** d'un système non-linéaire est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques par la valeur efficace du fondamental :

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} c_n^2}}{c_1}.$$

On définit également le *taux de distorsion approché* T comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques par la valeur efficace du signal :

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{+\infty} c_n^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2}}.$$

Lorsque la distorsion est faible, les deux taux sont très proches.

C.4. Représentation des fonctions de transfert harmonique

C.4.1 - Diagramme de Bode

Définition 12

On appelle **représentation dans le plan de Bode** d'une fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes :

– la *courbe de gain* : tracé du module $G(\text{dB})$, en décibels, en fonction de la pulsation ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ou de la fréquence f (en Hz) en échelle logarithmique :

$$G(\text{dB}) = 20\log H(\omega) = 20\log |\underline{H}(j\omega)|.$$

– la *courbe de phase* : tracé de l'argument $\phi(\omega)$, en radians (rad) ou en degrés, en fonction de la pulsation ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ou de la fréquence f (en Hz) en échelle logarithmique.

C.4.2 - Décomposition des fonctions de transfert

Grâce aux propriétés des complexes, le diagramme de Bode simplifie l'étude d'une fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$ qui se décompose comme le produit et/ou le quotient de plusieurs fonctions harmoniques. Par exemple, la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{H}_1(j\omega)\underline{H}_2(j\omega)}{\underline{H}_3(j\omega)}$$

a pour gain en décibels :

$$G(\text{dB}) = G_1(\text{dB}) + G_2(\text{dB}) - G_3(\text{dB})$$

et pour argument :

$$\arg[\underline{H}(j\omega)] = \arg[\underline{H}_1(j\omega)] + \arg[\underline{H}_2(j\omega)] - \arg[\underline{H}_3(j\omega)].$$

En représentation de Bode, les courbes de gain et de phase de la fonction $\underline{H}(j\omega)$ s'obtiennent donc simplement par addition et/ou soustraction graphiques des courbes de gain et de phase des fonctions $\underline{H}_1(j\omega)$, $\underline{H}_2(j\omega)$ et $\underline{H}_3(j\omega)$.

C.4.3 - Diagrammes asymptotiques

Il est souvent utile d'étudier le comportement aux limites des très basses fréquences (limite statique) et des très hautes fréquences d'un circuit électronique. En échelle logarithmique, cela correspond aux deux limites à l'infini de l'axe des abscisses¹. Nous chercherons systématiquement ces deux asymptotes pour toute fonction de transfert.

1. En effet :

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow \log \omega \rightarrow -\infty \\ \omega \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \log \omega \rightarrow +\infty \end{cases}$$

1. En conséquence du § C.4.3, les diagrammes asymptotiques d'une fonction de transfert qui peut se décomposer comme le produit-quotient de fonctions s'obtiennent par addition-soustraction des diagrammes asymptotiques de chacune de ces fonctions.

2. Un filtre passe-haut ou un filtre passe-bas ne possèdent qu'une seule fréquence de coupure.

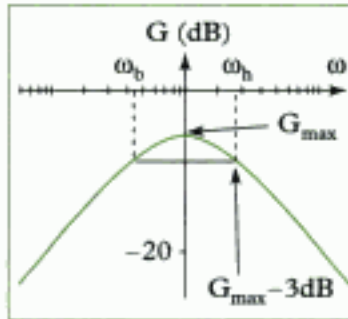


Fig. 13 - Définition de la bande passante à -3 dB.

3. En effet, on a :

$$20 \log(\sqrt{2}) = 3,01.$$

4. Cette fonction a déjà été étudiée en première année.

Définition 13

On appelle **diagrammes asymptotiques**¹ les diagrammes de Bode réduits à leurs asymptotes.

Le diagramme asymptotique du gain, facile à obtenir, permettra souvent à lui seul de caractériser le comportement global du filtre.

Définition 14

L'abscisse du point d'intersection des deux asymptotes de la courbe de gain, lorsqu'il existe, constitue la **pulsation de cassure** ou **brisure**.

C.4.4 - Bande passante à -3 dB

La courbe de gain d'un circuit réel présente toujours une borne supérieure, car, physiquement, le gain ne peut pas être infini. Lorsque c'est possible, on définit alors une ou deux pulsations de coupure² ($\omega_b < \omega_h$).

Définition 15

On appelle **pulsation de coupure** du filtre toute pulsation ω_c telle que :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}},$$

où H_{\max} désigne la valeur maximale prise par le module de la fonction de transfert (l'amplification).

Définition 16

La **bande passante** d'un filtre est l'intervalle de fréquence pour lequel :

$$|\underline{H}| > \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

En décibels, la définition d'une pulsation de coupure correspond à un point d'intersection de la courbe de gain avec une droite horizontale située à -3 dB sous le maximum³ (fig. 13).

C.5. Fonctions de transfert du second ordre

C.5.1 - Filtre passe-bas du deuxième ordre

Considérons la fonction de transfert du second ordre fondamentale, de forme canonique⁴ :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

où m est un réel positif et ω_0 est une pulsation caractéristique du filtre. Pour alléger les notations et les calculs, nous utilisons la variable réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. L'amplification et le gain ont alors pour expression :

$$\begin{cases} H(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2}} \\ G(\text{dB}) = -10 \log[(1-x^2)^2 + 4m^2x^2]. \end{cases}$$

Recherchons les asymptotes. À très basse fréquence, lorsque x tend vers 0, il est évident que le module tend vers 1 et le gain vers 0 dB. Aux très hautes fréquences, lorsque x tend vers l'infini, le terme dominant est le terme en x^4 . Nous avons donc, pour les asymptotes :

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0 & G(\text{dB}) \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty & G(\text{dB}) \rightarrow -40 \log x = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right). \end{cases}$$

La première asymptote se confond avec l'axe horizontal. La seconde asymptote est une droite de pente -40 dB/décade coupant l'axe horizontal en $x = 1$. Les deux asymptotes de la courbe de gain se coupent donc en ω_0 , pulsation de brisure (fig. 14) : il s'agit du diagramme asymptotique d'un *filtre passe-bas*.

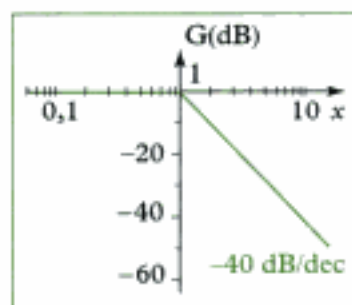


Fig. 14 - Diagramme asymptotique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du deuxième ordre.

C.5.2 - Filtre passe-bande du deuxième ordre

De même, la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du deuxième ordre s'écrit en variable réduite x :

$$\underline{H}(jx) = 2m \frac{jx}{1 + 2mjx - x^2}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

L'amplification et le gain ont alors pour expression :

$$\begin{cases} H(x) = 2m \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2}} \\ G(\text{dB}) = 20 \log(2m) + 20 \log x - 10 \log[(1-x^2)^2 + 4m^2x^2]. \end{cases}$$

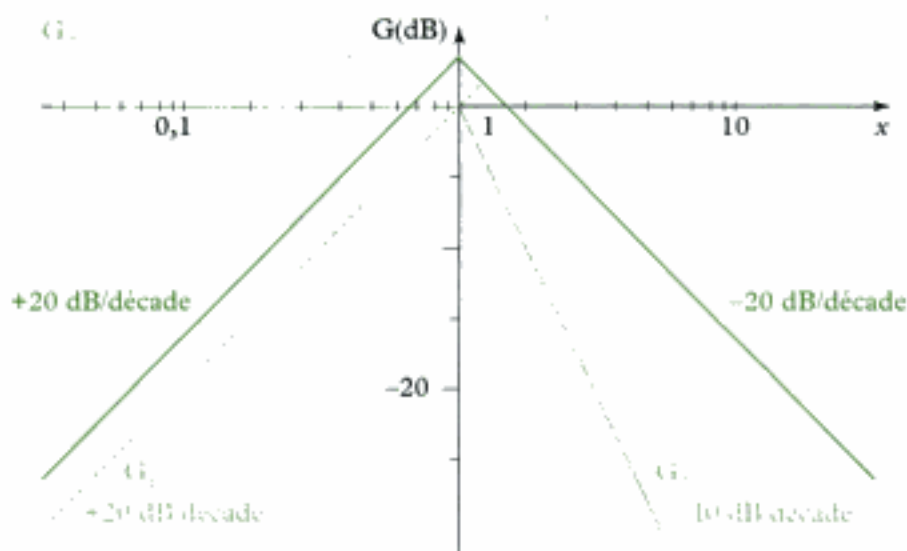


Fig. 15 - Diagramme asymptotique du filtre passe-bande du deuxième ordre.

La courbe de gain est celle d'un filtre passe-bande (fig. 15). Le maximum du gain est atteint pour $x = 1$ ($\omega = \omega_0$). Pour déterminer la bande passante à -3 dB de ce filtre, nous cherchons $x \geq 1$ tel que :

$$H(x) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ d'où : } \begin{cases} \omega_b = \omega_0(-m + \sqrt{1+m^2}) \\ \omega_h = \omega_0(m + \sqrt{1+m^2}). \end{cases}$$

- Nous pouvons remarquer que la bande passante est centrée sur ω_0 en échelle logarithmique. En effet :

$$\omega_b \omega_h = \omega_0^2, \text{ d'où : } \log \omega_0 = \frac{1}{2}(\log \omega_b + \log \omega_h).$$

- Remarquons également que la bande passante ne dépend pas de la quantité K . En effet, elle a pour largeur :

$$B_\omega = \omega_h - \omega_b = 2m\omega_0.$$

La sélectivité du filtre peut être caractérisée par le *facteur de qualité* Q défini comme :

$$Q = \frac{\omega_0}{B_\omega}, \text{ soit ici : } Q = \frac{1}{2m}.$$

Un filtre sélectif (bande passante étroite) se caractérise par un facteur de qualité important. La figure 16 présente la courbe de gain dans le plan de Bode pour trois valeurs du facteur de qualité du filtre, en supposant un gain maximum égal à 1.

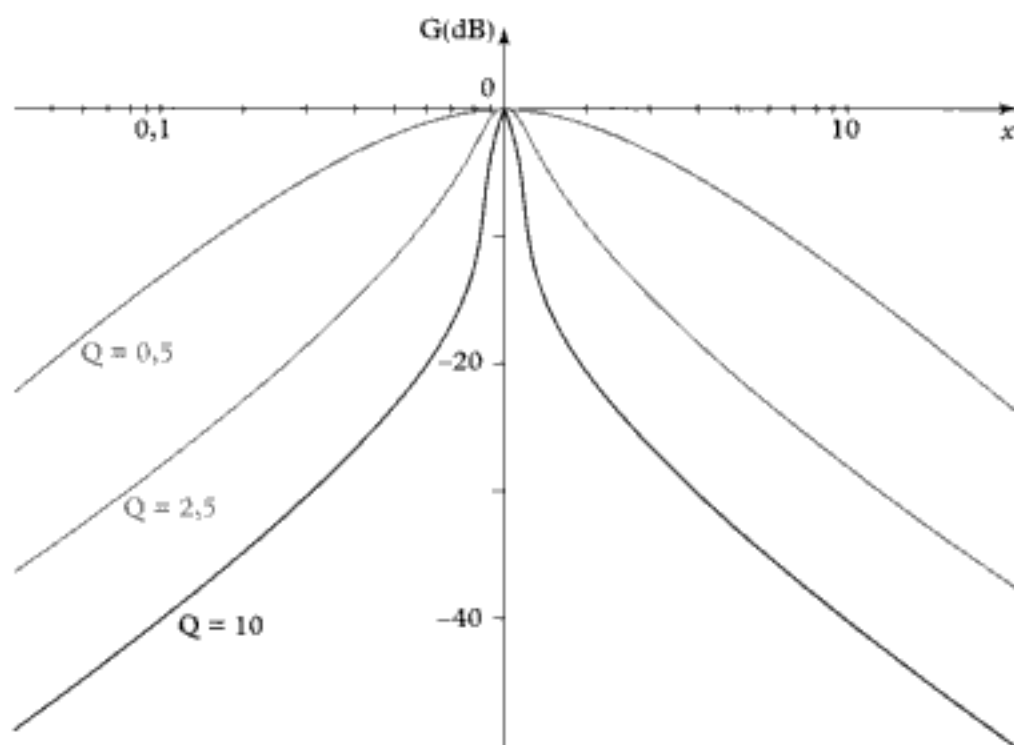


Fig. 16 - Courbes de gain d'un filtre passe-bande du deuxième ordre pour $Q = 0,5$; $Q = 2,5$; $Q = 10$.

C.6. Transformation de Laplace

Dans ce paragraphe, nous allons introduire un outil mathématique très puissant pour étudier la réponse des circuits linéaires à tous types de signaux réels¹ : la transformation de Laplace. Cette transformation permet d'associer à toute fonction du temps $f(t)$ une fonction $F(p)$ d'une variable complexe $p = \sigma + j\omega$, et de remplacer ainsi les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques.

C.6.1 - Définition

Dans la pratique, nous étudions le comportement d'un circuit en réponse à une excitation débutant à un instant donné, choisi comme origine des temps. Compte tenu du principe de causalité, les fonctions $f(t)$ étudiées sont identiquement nulles avant $t = 0$ (fonctions *causales*) :

$$f(t) = 0, \quad \forall t < 0.$$

1. Dans le cas du régime sinusoïdal, l'écriture et la résolution des équations différentielles régissant l'évolution du circuit peuvent aussi être évitées en travaillant dans le domaine fréquentiel avec les impédances complexes.

Définition 17

La transformation de Laplace d'une fonction causale du temps $f(t)$ est définie par l'intégrale :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \text{ avec } p = \sigma + j\omega.$$

1. Cette formule est très rarement utilisée. Il existe en effet des formulaires fournissant les transformées d'un grand nombre de fonctions, et donc leurs inverses.

La transformation inverse¹ est donnée par une intégrale complexe :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p)e^{pt} dp.$$

Application 4 Transformée de Laplace de signaux de test

Calculer la transformée de Laplace du signal échelon unitaire $u(t)$, puis celle du signal sinusoïdal réel $f(t) = \cos(\omega t)u(t)$.

Solution

• Pour le signal échelon, la transformation de Laplace s'écrit par définition :

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

• Pour le signal sinusoïdal, nous pouvons écrire :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

D'où la transformation de Laplace :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)u(t)] &= \int_0^{\infty} \cos(\omega t)u(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [e^{(-p+j\omega)t} + e^{-(p+j\omega)t}] dt = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(-p+j\omega)t}}{-p+j\omega} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(p+j\omega)t}}{p+j\omega} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{-p+j\omega} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{p+j\omega} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

2. La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

3. D'où le même intérêt que la notation complexe pour la résolution des équations différentielles en régime sinusoïdal.

4. Lorsque la fonction n'est pas nulle à $t=0$, la transformation de Laplace permet de prendre en compte les conditions initiales. C'est un autre intérêt de cette transformation que nous ne considérons pas ici.

C.6.2 - Différentiation et intégration

La transformation de Laplace est une application linéaire² qui transforme une dérivée en une multiplication et une intégrale en une division³.

Propriété 3

La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$ nulle pour $t=0$ est égale au produit par p de la transformée de Laplace $F(p)$ de cette fonction⁴ :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p).$$

Propriété 4

La transformée de Laplace de la primitive d'une fonction $f(t)$ est égale à la division par p de la transformée de Laplace $F(p)$ de cette fonction :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] = \frac{1}{p}F(p).$$

C.6.3 - Application à la résolution d'équations différentielles

Soit un système pour lequel les signaux en entrée et en sortie, notés respectivement $e(t)$ et $s(t)$, sont reliés par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}.$$

Le signal imposé en entrée est un signal quelconque, nul pour $t < 0$.

Appliquons la transformation de Laplace à l'équation différentielle. Nous notons $E(p)$ et $S(p)$ les transformées respectives des signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, pris nuls pour $t = 0$ (systèmes au repos). En remplaçant chaque différentiation par une multiplication par p , il vient :

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k S(p) = \sum_{k=0}^m b_k p^k E(p).$$

Cette expression est similaire à celle obtenue en régime sinusoïdal. Nous pouvons alors calculer une fonction de transfert identique à la fonction de transfert harmonique¹ :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

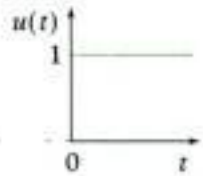
1. C'est pourquoi nous avons introduit très tôt la notation $p = j\omega$.

L'essentiel

✓ Signaux et systèmes

- Le signal **échelon unité**, de *Heaviside*, est défini par :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \forall t < 0 \\ u(t) = 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$



- Un signal $s(t)$ est **périodique** s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux. L'intervalle de temps *minimal* nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction est la *période* T . La *fréquence* f du signal est l'inverse de la période T :

$$f = \frac{1}{T}, \text{ avec } f \text{ en hertz (Hz) si } T \text{ en seconde (s).}$$

- Un système, caractérisé par la transformation F de E (espace des signaux en entrée) vers S (espace des signaux en sortie) est **linéaire** si et seulement si l'opérateur F est linéaire.
- Un système, caractérisé par la transformation F de E vers S , est **invariant** (ou *stationnaire*) si et seulement si une translation temporelle sur l'entrée entraîne la même translation sur la sortie :

$$\forall e \in E \text{ et } \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad s(t) = F[e(t)] \Rightarrow s(t - \tau) = F[e(t - \tau)].$$

- Un système défini par une équation différentielle à coefficients constants est linéaire et invariant. La réciproque est fautive. Par exemple, un système à retard (linéaire et invariant) ne vérifie pas d'équation différentielle.

✓ Fonction de transfert

- En régime sinusoïdal permanent, la **fonction de transfert harmonique** $\underline{H}(j\omega)$ (ou *transmittance complexe*) d'un circuit est définie comme le rapport, en notation complexe, de la tension de sortie par la tension d'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}, \text{ avec } \omega \text{ pulsation du signal d'entrée.}$$

- Un système pour lequel les signaux en entrée et en sortie sont reliés par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}$$

a pour fonction de transfert une fraction rationnelle de deux polynômes en $p = j\omega$:

$$H(p) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

- On appelle **représentation dans le plan de Bode** d'une fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$ l'ensemble des deux diagrammes :

- la *courbe de gain* : tracé du module $G(\text{dB})$, en décibels, en fonction de la pulsation ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ou de la fréquence f (en Hz) en échelle logarithmique :

$$G(\text{dB}) = 20 \log H(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|.$$

– la *courbe de phase* : tracé de l'argument $\phi(\omega)$, en radians (rad) ou en degrés, en fonction de la pulsation ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) ou de la fréquence f (en Hz) en échelle logarithmique.

✓ Analyse de Fourier

- Toute fonction réelle $s(t)$ périodique, de fréquence f , peut s'écrire sous la forme d'une **somme infinie** de fonctions sinusoïdales de pulsation :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

avec : $\omega = 2\pi f$ et
$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt. \end{cases}$$

La constante a_0 est la **composante continue** du signal. Les fréquences des composantes sinusoïdales sont des multiples de la fréquence f du signal périodique décomposé :

- La fréquence $f_1 = f$ correspond au **fondamental**, ou *premier harmonique* ($n = 1$).
- La fréquence $f_n = nf$ correspond à l'**harmonique d'ordre n** ($n > 1$).
- La décomposition de Fourier d'un signal périodique peut aussi se mettre sous la forme :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec :
$$\begin{cases} c_0 = |a_0| \text{ et } \cos \varphi_0 = \text{signe}(a_0) \\ c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \text{ et } \sin \varphi_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}. \end{cases}$$

Le spectre d'amplitude $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et le spectre de phase $\{\varphi_n\}_{n \geq 0}$ constituent le **spectre de Fourier** du signal $s(t)$.

- Le spectre du signal en sortie d'un **filtre linéaire** comporte le même fondamental et les mêmes harmoniques que le spectre du signal d'entrée. Leurs amplitudes peuvent cependant être modifiées par le filtre (amplifiées, atténuées, voire annulées).

Le spectre du signal en sortie d'un **filtre non-linéaire** comporte toujours plus d'harmoniques que le spectre du signal d'entrée. Un filtre non-linéaire enrichit le spectre de Fourier.

- Le **taux de distorsion D** d'un système non-linéaire est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques par la valeur efficace du fondamental. Le **taux de distorsion approché T** est défini comme le rapport de la valeur efficace des harmoniques par la valeur efficace du signal :

$$D = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} c_n^2}}{c_1} \quad \text{et} \quad T = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} c_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2}}.$$

Lorsque la distorsion est faible, les deux taux sont très proches.

✓ Transformation de Laplace

La **transformation de Laplace** d'une fonction causale du temps $f(t)$ ($f(t) = 0$) pour $t < 0$ est définie par l'intégrale :

$$L[f(t)] = F(p) \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ avec } p = \sigma + j\omega.$$

– La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$ nulle pour $t = 0$ est égale au produit par p de la transformée de Laplace $F(p)$ de cette fonction :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p).$$

– La transformée de Laplace de la primitive d'une fonction $f(t)$ est égale à la division par p de la transformée de Laplace $F(p)$ de cette fonction :

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{p}F(p).$$

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment établir la fonction de transfert d'un système à partir de son équation différentielle ?

On connaît l'équation différentielle régissant l'évolution d'un circuit au cours du temps. On se propose d'en déduire la fonction de transfert du système.

→ Savoir faire

- ❶ Remplacer dans l'équation différentielle chaque dérivée d'ordre n par une multiplication par p^n .
- ❷ Factoriser les signaux d'entrée et de sortie de manière à faire apparaître deux polynômes en p :

$$D(p)s(t) = N(p)e(t).$$

- ❸ En déduire la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

→ Application

Trouver la fonction de transfert d'un système obéissant à l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) + kx(t) = f(t).$$

Solution

- ❶ Dans l'équation différentielle, on remplace chaque dérivée d'ordre n des fonctions x ou f par une multiplication par p^n :

$$mp^2x(t) + \lambda px(t) + kx(t) = f(t).$$

- ❷ En factorisant les signaux d'entrée et de sortie, on fait apparaître deux polynômes en p :

$$(mp^2 + \lambda p + k)x(t) = f(t).$$

Ici, il n'y a pas de dérivée du signal d'entrée $f(t)$ (système fondamental).

- ❸ On en déduit alors la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{mp^2 + \lambda p + k} \text{ ou } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{k + j\lambda\omega - m\omega^2}.$$

Méthode n° 2

Comment établir l'équation différentielle d'un système à partir de sa fonction de transfert ?

On connaît la fonction de transfert d'un circuit. On se propose d'en déduire l'équation différentielle régissant l'évolution du système au cours du temps.

→ Savoir faire

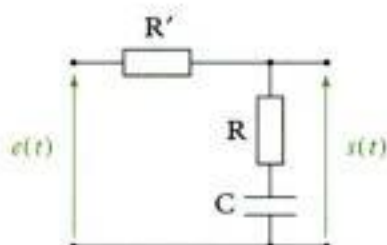
- 1 Calculer la fonction de transfert du circuit en appliquant les lois de l'électrocinétique et en utilisant le formalisme des impédances.
- 2 Écrire la fonction de transfert sous la forme du rapport de deux polynômes en $p = j\omega$.
- 3 Déduire de la fonction de transfert une relation entre les signaux d'entrée et de sortie :

$$H(p) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{N(p)}{D(p)} \Leftrightarrow D(p)s(t) = N(p)e(t).$$

- 4 Développer et remplacer chaque terme en p^n par une dérivée n -ième.
- 5 Normaliser l'équation différentielle : diviser celle-ci par le coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé en $s(t)$.

→ Application

Trouver l'équation différentielle gouvernant le circuit schématisé ci-dessous :



Solution

- 1 Le circuit est un pont diviseur de tension. La tension $e(t)$ est appliquée aux trois dipôles R' , R et C en série. La tension $s(t)$ est prise aux bornes des deux dipôles R et C . Nous pouvons donc écrire :

$$H(p) = \frac{R + \underline{Z}_C}{R' + R + \underline{Z}_C}.$$

- 2 Développons l'expression précédente pour faire apparaître des polynômes en $p = j\omega$:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{Cp} \Rightarrow H(p) = \frac{R + \frac{1}{Cp}}{R' + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{1 + RCp}{1 + (R + R')Cp}.$$

- 3 D'où la relation entre $s(t)$ et $e(t)$:

$$H(p) = \frac{1 + RCp}{1 + (R + R')Cp} \Leftrightarrow [1 + (R + R')Cp]s(t) = (1 + RCp)e(t).$$

- 4 Soit après développement :

$$s(t) + (R + R')Cps(t) = e(t) + RCpe(t).$$

Remplaçons p par une dérivation pour obtenir l'équation différentielle recherchée :

$$s(t) + (R + R')C \frac{ds(t)}{dt} = e(t) + RC \frac{de(t)}{dt}.$$

- ⑤ Normalisons cette équation en divisant par $(R + R')C$:

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{(R + R')C} s(t) = \frac{R}{R + R'} \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{(R + R')C} e(t).$$

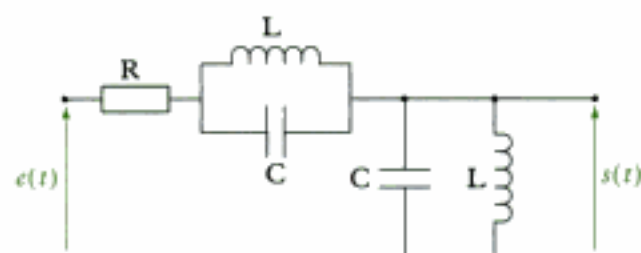
Chaque terme de cette équation est bien homogène à une tension divisée par un temps.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Filtre passif passe-bande

Considérons le circuit passif schématisé ci-dessous :

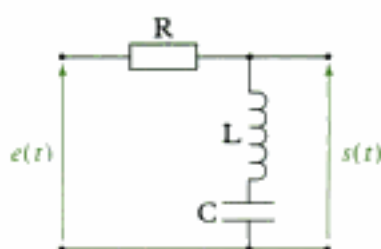


- 1) Calculer la fonction de transfert harmonique de ce filtre.
- 2) Tracer la courbe de gain du diagramme de Bode. De quel type de filtre s'agit-il ?
- 3) Calculer les fréquences de coupures et la bande passante à -3 dB de ce filtre.

Niveau 2

Ex. 2 Filtre coupe-bande

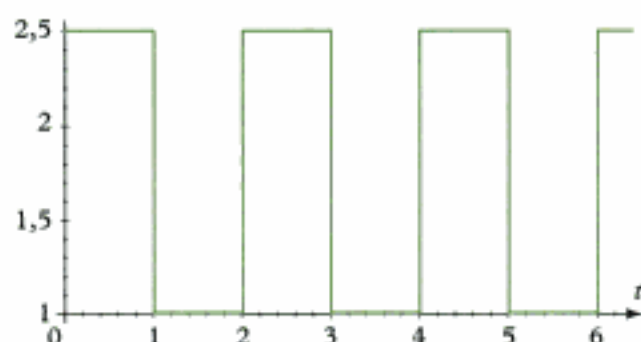
Considérons le circuit passif schématisé ci-dessous :



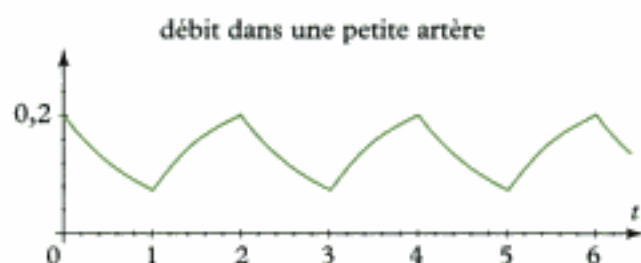
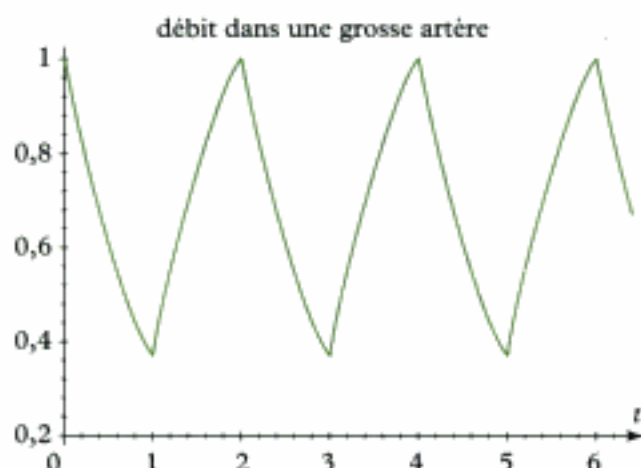
- 1) Calculer la fonction de transfert harmonique de ce filtre.
- 2) Tracer la courbe de gain du diagramme de Bode. De quel type de filtre s'agit-il ?
- 3) Calculer les fréquences de coupures et la bande passante à -3 dB de ce filtre.

Ex. 3 Analogie électrique pour modéliser la circulation artérielle

Le cœur joue le rôle d'une pompe pour la circulation sanguine. Celle-ci n'est donc pas continue : la pression du sang éjecté du cœur a , en fonction du temps t , grossièrement, l'allure donnée par la figure ci-après :

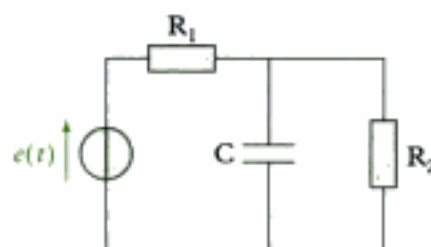


La mesure du débit du volume artériel dans une grosse artère ou une petite artère conduit à des résultats expérimentaux ayant l'allure donnée par les deux figures suivantes :



Les unités utilisées dans ces trois figures sont arbitraires, mais elles sont identiques dans les deux figures ci-dessus.

On se propose ici d'étudier un modèle électrique simple permettant de décrire, par analogie, ce phénomène. On considère le circuit électrique schématisé ci-dessous :



Le générateur de tension idéal délivrant une tension périodique $e(t)$ « crêteaux », de période T et de rapport cyclique $\frac{1}{2}$ tel que sur la période $[0, T]$:

$$\begin{cases} e(t) = E_1 & \text{pour } 0 < t < \frac{T}{2} \\ e(t) = E_2 & \text{pour } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

avec : $0 < E_1 < E_2$.

- 1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant i_2 circulant dans la résistance R_2 .
- 2) Résoudre cette équation différentielle en distinguant les intervalles de temps $\left[0, \frac{T}{2}\right]$ et $\left[\frac{T}{2}, T\right]$.
- 3) Représenter l'allure de $i_2(t)$ et la comparer avec celle du débit $Q(t)$ dans une artère. Quelle est l'influence de la résistance R_2 ?
- 4) Proposer une analogie entre la pression P et le débit Q d'une part, et la force électromotrice e et l'intensité i_2 d'autre part. Quelle est qualitativement le type de grandeur mécanique analogue à R_2 ? Quel est l'analogue du générateur de tension ?

Ex. 4 Suspension avec amortisseur

On modélise le système de suspension d'un véhicule de la manière suivante : la roue de centre O supporte une charge assimilée à un point matériel M de masse m par l'intermédiaire d'un ressort, de longueur à vide L_0 et de raideur k , en parallèle avec un amortisseur. On suppose l'axe OM toujours vertical.

Le véhicule effectue un mouvement de translation uniforme à la vitesse \vec{v} . On choisit un axe Ox horizontal parallèle à la vitesse \vec{v} et de même sens ayant pour vecteur unitaire \vec{e}_x . L'axe vertical est orienté vers le haut, avec pour vecteur unitaire \vec{e}_z .

Les positions des points O et M sont repérées relativement à leurs positions d'équilibre, notées respectivement O_r et M_r , lorsque le véhicule est au repos. Les coordonnées $x_O(t)$ et $z_O(t)$ du point O font donc référence au repère $(O_r; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et celles $x(t)$ et $z(t)$ du point M au repère $(M_r; \vec{e}_x, \vec{e}_z)$. On suppose ces deux repères galiléens. On note L_r la longueur du ressort lorsque le véhicule est au repos.

L'amortisseur exerce sur M une force proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O , soit :

$$\vec{F} = -h \left(\frac{d\vec{x}(t)}{dt} - \frac{d\vec{x}_O(t)}{dt} \right) \vec{e}_z.$$

Données :

$$\begin{aligned} m &= 2 \cdot 10^3 \text{ kg} ; L_0 = 75 \text{ cm} ; k = 65 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} ; \\ h &= 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

1) Déterminer $\Delta L = L_r - L_0$.

2) Le véhicule étant en mouvement de translation uniforme à la vitesse \vec{v} , la roue se déplace le long d'une piste ondulée en restant toujours en contact. La trajectoire du centre de la roue est modélisée par l'équation :

$$z_O = a \cos\left(\frac{2\pi x_O}{\lambda}\right), \text{ avec } a = 15 \text{ cm et } \lambda = 1 \text{ m.}$$

Écrire les équations $x_O(t)$, en choisissant $x_O(0) = 0$, et $z_O(t)$ du mouvement de O . On mettra la seconde équation sous la forme : $z_O(t) = a \cos(\omega t)$. On précisera l'expression de la pulsation ω .

3) a) Écrire, à tout instant $t > 0$, la longueur du ressort $L(t)$ en fonction de $z(t)$, $z_O(t)$ et L_r .

b) Donner l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. On mettra celle-ci sous la forme d'une équation différentielle de deuxième ordre avec second membre.

4) On suppose le régime sinusoïdal établi. On cherche une solution de la forme :

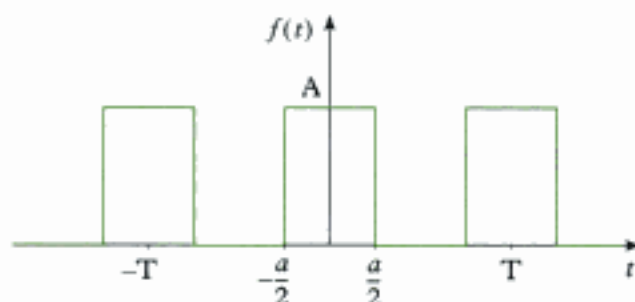
$$z(t) = Z_m \cos(\omega t + \phi)$$

en utilisant les notations complexes. On note $\underline{Z}(j\omega) = Z_m e^{j\phi}$ l'amplitude complexe associée à $z(t)$. Donner l'expression de $\underline{Z}(j\omega)$ et en déduire Z_m .

Niveau 3

Ex. 5 Décomposition de Fourier d'un crêteau

On considère un crêteau d'amplitude A , de période T et de rapport cyclique α ($0 < \alpha < 1$). Un tel signal est une succession périodique d'impulsions rectangulaires de hauteur A et de largeur a telle que $a = \alpha T$. Pour simplifier les calculs, nous choisissons une origine des temps telle que la fonction $f(t)$ est paire.



1) Calculer les coefficients a_n et b_n de la décomposition de Fourier de ce signal.

2) Représenter son spectre de Fourier pour $\alpha = 0,3$.

3) Déterminer et représenter la densité spectrale de puissance du crêteau et son spectre de puissance pour $\alpha = 0,3$.

Solutions des exercices

Exercice de niveau 1

Exercice 1

1) Notons \underline{Z} l'impédance équivalente d'un condensateur C en parallèle avec une auto-inductance L :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_C \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{1}{jC\omega} jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Le circuit est un diviseur de tension, la tension d'entrée $e(t)$ étant appliquée à la résistance R et aux deux dipôles \underline{Z} en série, et la tension de sortie étant prélevée aux bornes du dernier dipôle \underline{Z} . D'où :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{R + 2\underline{Z}}, \text{ soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{R + 2 \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} = \frac{jL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + 2jL\omega}$$

Pour normaliser le dénominateur, il vient en factorisant R :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{R} \times \frac{jL\omega}{1 + 2j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

Nous pouvons faire intervenir au dénominateur du deuxième ordre une pulsation propre du circuit ω_0 et un coefficient d'amortissement α . Par identification, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = LC\omega^2 &\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2j\alpha \frac{\omega}{\omega_0} = 2j\frac{L}{R}\omega &\Leftrightarrow \alpha = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

En utilisant la variable réduite x , la fonction de transfert peut donc s'écrire sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2\alpha j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \text{ soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha j x}{1 + 2\alpha j x - x^2} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

2) La fonction de transfert a pour module H :

$$H(x) = \frac{\alpha x}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}}$$

– Le gain G en décibels est donc la somme de trois termes :

$$G(\text{dB}) = 20\log(\alpha) + 20\log(x) - 10\log[(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2],$$

le premier étant une constante (G_0), le second une droite de pente +20 dB/décade (G_1) et le troisième le gain d'une fonction de transfert du deuxième ordre fondamentale (G_2).

– Le diagramme asymptotique du gain est donné par :

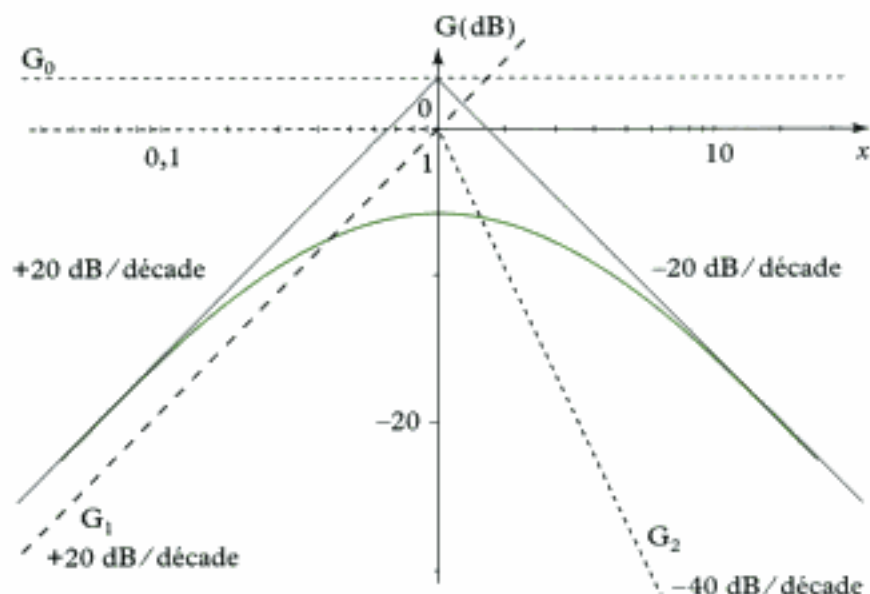
$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & G(\text{dB}) \rightarrow 20\log(\alpha) + 20\log(x) - 10\log(1) = 20\log(\alpha) + 20\log(x) \\ x \rightarrow \infty & G(\text{dB}) \rightarrow 20\log(\alpha) + 20\log(x) - 10\log(x^4) = 20\log(\alpha) - 20\log(x) \end{cases}$$

Les deux asymptotes, de pentes respectives +20 dB/décade et -20 dB/décade, se coupent au point de coordonnées $x = 1$ et $G = 20\log\alpha$ (la pulsation propre ω_0 est également pulsation de brisure).

– Dérivons le gain par rapport à x :

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dx} &= \frac{20}{\ln 10} \times \frac{1}{x} - \frac{10}{\ln 10} \times \frac{2(-2x)(1-x^2) + 8\alpha^2 x}{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2} \\ &= \frac{20}{\ln 10} \left[\frac{1}{x} - \frac{(-2x)(1-x^2) + 4\alpha^2 x}{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2} \right] \\ &= \frac{20}{\ln 10} \times \frac{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2 + 2x^2(1-x^2) - 4\alpha^2 x^2}{x[(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2]} \\ &= \frac{20}{\ln 10} \times \frac{(1-x^2)(1-x^2+2x^2)}{x[(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2]} = \frac{20}{\ln 10} \times \frac{1-x^4}{x[(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2]}.\end{aligned}$$

La dérivée du gain s'annule pour $x = 1$ (soit $\omega = \omega_0$). La courbe de gain présente un maximum en ce point : le filtre étudié est donc un **filtre passe-bande du deuxième ordre**.



3) Pour $x = 1$, le module maximum H_{\max} est égal à :

$$H_{\max} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Déterminons la bande passante à -3 dB de ce filtre. Cherchons $x \geq 1$ tel que :

$$H(x) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ c'est-à-dire : } H(x) = \frac{\alpha x}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

En élevant cette expression au carré, nous obtenons :

$$\frac{\alpha^2 x^2}{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2} = \frac{1}{8}, \text{ soit : } 8\alpha^2 x^2 = (1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2.$$

Le calcul donne alors :

$$(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2 \Leftrightarrow (1-x^2) = \pm 2\alpha x.$$

Nous obtenons deux équations du deuxième degré :

$$x^2 \pm 2\alpha x - 1 = 0, \text{ avec } \Delta' = \alpha^2 + 1.$$

Comme $\Delta' > 0$, chaque équation admet deux solutions réelles. Nous avons donc quatre solutions :

$$r = \pm \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2}$$

dont nous ne conservons que les racines positives. D'où les limites de la bande passante :

$$\begin{cases} \omega_b = \omega_0(-\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \\ \omega_h = \omega_0(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \end{cases}$$

$$\text{et } B_\omega = \omega_h - \omega_b = 2\alpha\omega_0$$

Exercices de niveau 2

Exercice 2

a) Le circuit est un pont diviseur de tension. La tension d'entrée $e(t)$ est appliquée aux trois dipôles R, L et C en série, alors que la tension de sortie est prélevée aux bornes de la bobine en série avec le condensateur. Nous avons donc :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{z}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$

$$\text{soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Pour faciliter l'étude de son comportement, introduisons une pulsation caractéristique ω_0 :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\alpha j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{soit par identification : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

En variable réduite, la fonction de transfert a donc pour expression :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1 - x^2}{1 + 2\alpha jx - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

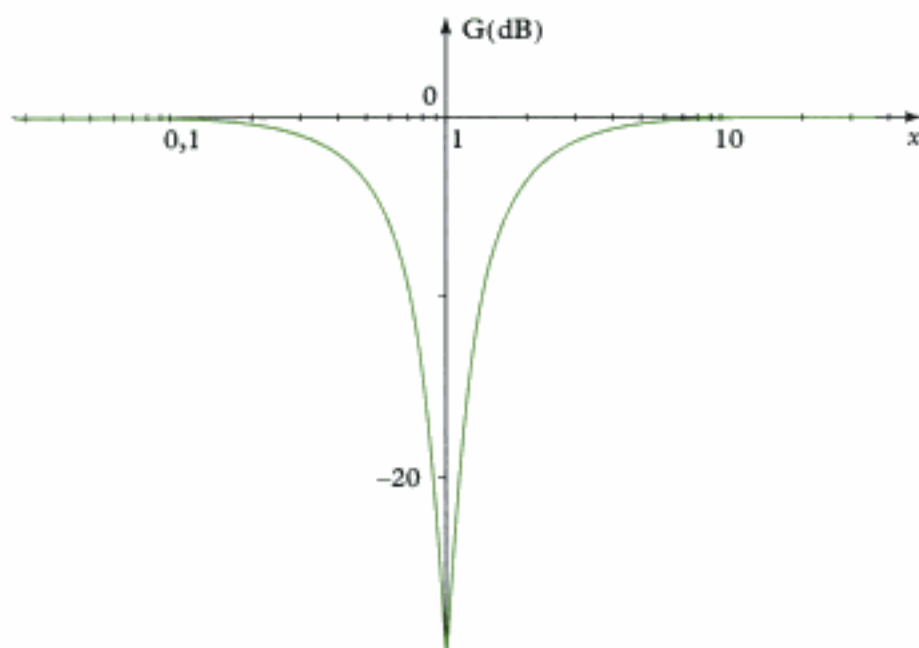
b) Le gain a pour expression :

$$G(\text{dB}) = 20\log|1 - x^2| - 10\log[(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2]$$

Le gain $G(\text{dB})$ peut s'écrire comme la somme de deux termes, notés respectivement $G_1(\text{dB})$ et $G_2(\text{dB})$. Nous en déduisons le diagramme asymptotique de la courbe de gain $G(\text{dB})$:

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & G_1(\text{dB}) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad G_2(\text{dB}) \rightarrow 0 \Rightarrow G(\text{dB}) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty & G_1(\text{dB}) \rightarrow 40\log x \quad \text{et} \quad G_2(\text{dB}) \rightarrow -40\log x \Rightarrow G(\text{dB}) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 1 & G_1(\text{dB}) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad G_2(\text{dB}) \rightarrow -20\log(2\alpha) \Rightarrow G(\text{dB}) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

La courbe de gain $G_1(\text{dB})$ présente donc deux asymptotes horizontales en l'infini et une asymptote verticale en $x = 1$. Il s'agit d'un **filtre coupe-bande**, qui rejette un domaine en pulsation autour de la pulsation caractéristique ω_0 .



c) Le gain maximum, égal à 1, est atteint lorsque ω tend vers zéro ou vers l'infini. Nous cherchons ω ou x tels que :

$$H(x) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}},$$

soit :

$$\frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où en élevant cette expression au carré :

$$2(1 - x^2)^2 = (1 - x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2 \Leftrightarrow (1 - x^2)^2 = 4\alpha^2 x^2.$$

Nous obtenons donc deux équations :

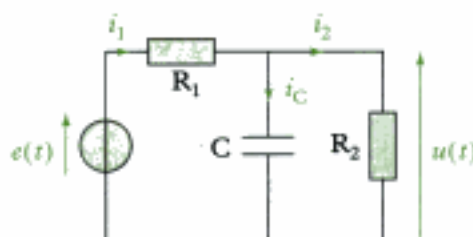
$$1 - x^2 = \pm 2\alpha x, \text{ soit : } x^2 \pm 2\alpha x - 1 = 0.$$

En ne gardant que les deux racines positives, les fréquences de coupure et la bande passante sont :

$$\begin{cases} \omega_b = \omega_0(-\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \\ \omega_h = \omega_0(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}) \end{cases} \quad \text{et} \quad B_\omega = [0, \omega_b] \cup [\omega_h, \infty[$$

Exercice 3

1) Notons i_1 , i_2 et i_C les intensités des courants traversant respectivement les résistances R_1 , R_2 et le condensateur C , le choix d'orientation étant indiqué sur la figure ci-dessous. Notons également $u(t)$ la tension aux bornes de la résistance R_2 et du condensateur C .



Nous avons quatre inconnues, que nous pouvons relier par les quatre équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & u(t) = e(t) - R_1 i_1(t) \quad (\text{loi des mailles}) \\ (2) & u(t) = R_2 i_2(t) \quad (\text{loi d'Ohm}) \\ (3) & i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (\text{équation d'un condensateur}) \\ (4) & i_1(t) = i_2(t) + i_C(t) \quad (\text{loi des nœuds}) \end{array} \right.$$

Les équations (1) et (2) nous donnent :

$$u(t) = e(t) - R_1 i_1(t) = R_2 i_2(t) \Rightarrow i_1(t) = \frac{e(t)}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} i_2(t).$$

Les équations (2) et (3) nous donnent :

$$i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt} = R_2 C \frac{di_2(t)}{dt}.$$

En reportant ces deux expressions dans l'équation (4), il vient :

$$i_1(t) = i_2(t) + i_C(t) \Rightarrow \frac{e(t)}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} i_2(t) = i_2(t) + R_2 C \frac{di_2(t)}{dt}.$$

D'où, en multipliant par R_1 et en regroupant les termes :

$$(R_1 + R_2) i_2(t) + R_1 R_2 C \frac{di_2(t)}{dt} = e(t)$$

soit encore :

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_2(t) = \frac{1}{R_1 R_2 C} e(t)$$

ou :

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i_2(t) = \frac{1}{R_1 R_2 C} e(t), \text{ avec } \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}.$$

Sur chaque demi-période, l'intensité i_2 vérifie donc l'équation :

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} i_2(t) = \frac{1}{R_1 R_2 C} E, \text{ avec } E = E_1 \text{ ou } E_2.$$

2) L'équation vérifiée par i_2 sur chaque demi-période admet comme solution la somme de la solution générale de l'équation homogène :

$$i_2(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et d'une solution particulière de l'équation complète :

$$i_2 = \frac{\tau}{R_1 R_2 C} E = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i_2(t) = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + K_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T}{2} \right[\\ i_2(t) = \frac{E_2}{R_1 + R_2} + K_2 e^{-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}} \text{ pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T \right[\end{array} \right.$$



Sur la demi-période $\left[\frac{T}{2}, T \right]$, il ne faut pas oublier de tenir compte du décalage temporel.

Pour calculer les constantes K_1 et K_2 , nous utilisons la continuité de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur à la transition de chaque demi-période, qui impose la continuité de l'intensité $i_2(t)$.

– La continuité en $\frac{T}{2}$ s'écrit :

$$\frac{E_1}{R_1 + R_2} + A_1 e^{-\frac{T}{2\tau}} = \frac{E_2}{R_1 + R_2} + A_2.$$

– La continuité en T s'écrit :

$$\frac{E_1}{R_1 + R_2} + A_1 = \frac{E_2}{R_1 + R_2} + A_2 e^{-\frac{T}{2\tau}}.$$

Par différence, nous en déduisons donc :

$$A_1 \left(e^{-\frac{T}{2\tau}} - 1 \right) = A_2 \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right), \text{ soit : } A_1 = -A_2.$$

En reportant ce résultat dans une des deux relations précédentes, il vient :

$$\frac{E_1}{R_1 + R_2} + A_1 e^{-\frac{T}{2\tau}} = \frac{E_2}{R_1 + R_2} - A_1, \text{ d'où : } A_1 = -A_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

3) L'allure de la courbe représentant l'évolution de l'intensité i_2 sur plusieurs périodes est semblable à celle de la courbe représentant l'évolution de débit artériel au cours du temps donnée dans l'énoncé.

Une augmentation de la résistance R_2 augmente la constante de temps τ et diminue les amplitudes sur chaque demi-période. Il faut donc une résistance R_2 plus grande pour modéliser une petite artère par rapport à une grande.

4) Ce résultat nous conduit à penser que la tension électrique est l'analogue de la pression artérielle et que l'intensité électrique est l'analogue du débit artériel. Le générateur de tension $e(t)$ modélise alors le cœur et la résistance R_2 représente la résistance à l'écoulement des artères.

Exercice 4

1) Au repos, le point matériel M est soumis à deux forces verticales :

– son poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;

– la réaction du ressort : $\vec{F}_R = -k\Delta L\vec{e}_z = -k(L_r - L_0)\vec{e}_z$.



L'amortisseur n'a aucun effet en l'absence de mouvement vertical de M .



La force exercée par le ressort est dirigée vers le haut si le ressort est raccourci ($\Delta L < 0$) et vers le bas si le ressort est allongé ($\Delta L > 0$).

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué dans un référentiel galiléen, nous avons lorsque le véhicule est au repos :

$$\vec{P} + \vec{F}_R = -mg\vec{e}_z - k\Delta L\vec{e}_z = \vec{0}, \text{ soit : } \Delta L = L_r - L_0 = -\frac{mg}{k}$$

2) Comme le véhicule se déplace avec une vitesse horizontale, il en est de même pour M et O .

D'où :

$$x(t) = x_O(t) = vt.$$

En reportant cette expression dans l'équation de la trajectoire de O, nous obtenons :

$$z_O(t) = a \cos\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}\right) = a \cos(\omega t), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

3) a) À chaque instant t , nous pouvons écrire :

$$L(t) = \overline{OM} = \overline{OO_r} + \overline{O_rM_r} + \overline{M_rM}, \text{ soit : } L(t) = -z_O(t) + L_r + z(t)$$

b) Comme horizontalement, le point matériel M est animé d'un mouvement uniforme, il n'est soumis à aucune force ni accélération horizontales. En revanche, il est soumis à trois forces verticales :

– son poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;

– la réaction du ressort : $\vec{F}_R(t) = -k[L(t) - L_0]\vec{e}_z = -k[z(t) - z_O(t) + L_r - L_0]\vec{e}_z$;

– la force d'amortissement visqueux de l'amortisseur : $\vec{F} = -h\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dz_O(t)}{dt}\right)\vec{e}_z$.

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué dans un référentiel galiléen, le mouvement vertical de M est régi par l'équation :

$$\vec{P} + \vec{F}_R(t) + \vec{F} = m\vec{a}_M(t)$$

$$\text{d'où : } -mg\vec{e}_z - k[z(t) - z_O(t) + L_r - L_0]\vec{e}_z - h\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dz_O(t)}{dt}\right)\vec{e}_z = m\frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{e}_z.$$

En se souvenant que (cf. 1.) : $mg + k(L_r - L_0) = 0$, l'équation différentielle devient :

$$-k[z(t) - z_O(t)] - h\left(\frac{dz(t)}{dt} - \frac{dz_O(t)}{dt}\right) = m\frac{d^2z(t)}{dt^2},$$

soit encore :

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} + h\frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = h\frac{dz_O(t)}{dt} + kz_O(t)$$

4) Les quantités complexes associées aux mouvements verticaux de O et M sont notées :

$$\underline{Z}_O(t) = ae^{j\omega t} \text{ et } \underline{Z}(t) = Z_me^{j\omega t + \phi} = \underline{Z}(j\omega)e^{j\omega t}, \text{ avec } \underline{Z}(j\omega) = Z_me^{j\phi}.$$

Avec ces notations, il vient pour l'équation différentielle :

$$-m\omega^2 \underline{Z}(t) + jh\omega \underline{Z}(t) + k\underline{Z}(t) = jh\omega \underline{Z}_O(t) + k\underline{Z}_O(t)$$

$$[(k - m\omega^2) + jh\omega]\underline{Z}(t) = (k + jh\omega)\underline{Z}_O(t)$$

Ce qui nous donne :

$$[(k - m\omega^2) + jh\omega]\underline{Z}(j\omega) = (k + jh\omega)a,$$

d'où :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{(k + jh\omega)a}{(k - m\omega^2) + jh\omega}$$

L'expression de l'amplitude du mouvement du point M s'en déduit aisément :

$$Z_m = a \sqrt{\frac{k^2 + h^2\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + h^2\omega^2}}$$

Exercice de niveau 3

Exercice 5

1) Pour le calcul des coefficients a_n et b_n de la décomposition de Fourier du signal créneau, nous choisissons la période centrée sur 0 :

$$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right].$$

La fréquence f et la pulsation ω du fondamental sont :

$$f = \frac{1}{T} \text{ et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

• Commençons par calculer la valeur moyenne a_0 du signal :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A dt = \frac{aA}{T}, \text{ d'où: } a_0 = \alpha A, \text{ d'où: } \boxed{a_0 = \alpha A}$$



Comme nous pouvions facilement le prévoir, la valeur moyenne du signal est égale au produit du rapport cyclique et de l'amplitude.

• Calculons les coefficients a_n pour $n > 0$:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A \cos(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}},$$

Ce qui nous donne :

$$a_n = \frac{4A}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\omega a}{2}\right)}{n\omega},$$

soit avec $\omega T = 2\pi$:

$$\boxed{a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin\left(\frac{n\omega a}{2}\right)}$$

• Calculons les coefficients b_n pour $n > 0$:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A \sin(n\omega t) dt = \frac{2A}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

soit :

$$\boxed{b_n = 0}$$



Les coefficients b_n sont tous nuls, ce que nous aurions pu énoncer sans calcul puisque la fonction représentant le signal est paire.

2) • La largeur de l'impulsion a est liée à la période du créneau par le rapport cyclique :

$$a = \alpha T \Rightarrow \frac{n\omega a}{2} = \frac{n\omega \alpha T}{2} = \frac{n\alpha 2\pi}{2} = n\alpha\pi.$$

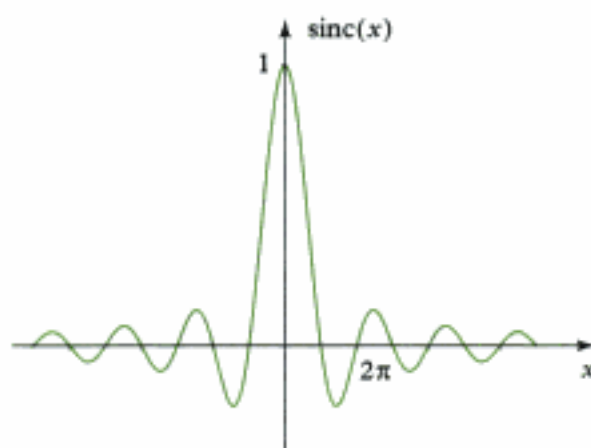
Les coefficients a_n se réécrivent donc pour $n > 0$:

$$a_n = 2\alpha A \frac{\sin(n\alpha\pi)}{n\alpha\pi} = 2\alpha A \text{sinc}(n\alpha\pi).$$



sinc représente la fonction sinus cardinal de pseudo-période 2π définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ pour } x \text{ réel non nul et } \text{sinc}(0) = 1.$$



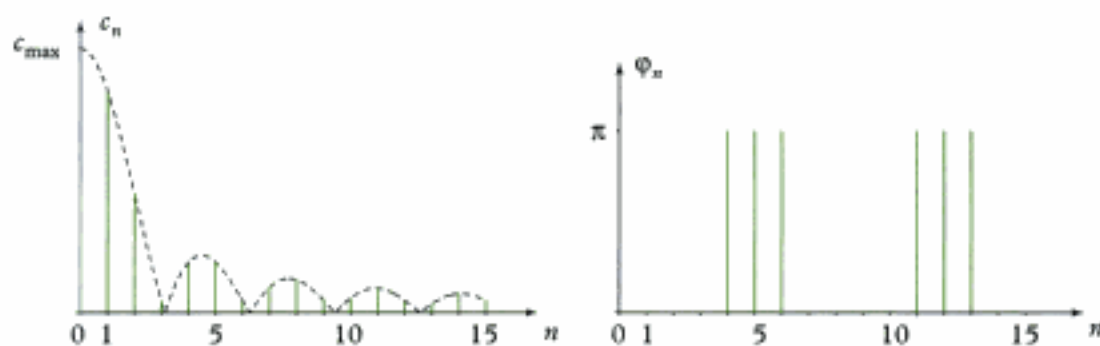
• Déterminons maintenant les spectres d'amplitude et de phase du créneau, c'est-à-dire les coefficients c_n et φ_n . Pour les amplitudes, nous prenons :

$$c_0 = \alpha A \text{ et } c_n = 2\alpha A |\text{sinc}(n\alpha\pi)|.$$

Les phases sont alors :

$$\begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \varphi_n = 0 \text{ si } \text{sinc}(n\alpha\pi) \geq 0 \\ \varphi_n = \pi \text{ si } \text{sinc}(n\alpha\pi) < 0 \end{cases}$$

Les figures ci-dessous représentent le spectre d'amplitude et le spectre de phase d'un créneau de rapport cyclique $\alpha = 0,3$.

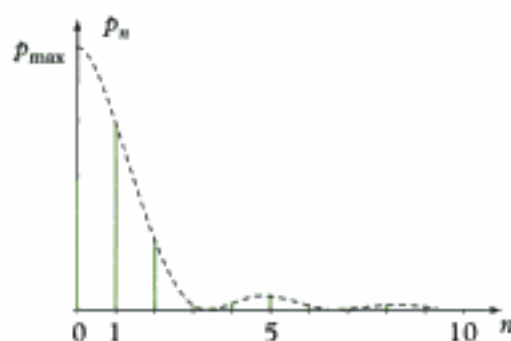


Sur le spectre d'amplitude, la courbe en pointillés représente la valeur absolue de la fonction sinus cardinal, avec $c_{\max} = 2\alpha A$. Sur le spectre de phase, les raies présentes (lobes impairs de la fonction sinus cardinal) ont toutes pour phase π .

c) • À partir des coefficients c_n , nous pouvons calculer les termes de la densité spectrale de puissance :

$$p_0 = c_0^2 = \alpha^2 A^2 \text{ et } p_n = \frac{c_n^2}{2} = 2\alpha^2 A^2 \text{sinc}^2(n\alpha\pi).$$

Sur la figure ci-après, la densité spectrale est représentée pour $\alpha = 0,3$ (la courbe en pointillés représente $\text{sinc}^2(0,3n\pi)$ avec $p_{\max} = 2\alpha^2 A^2$).



- En additionnant de proche en proche les raies de la densité spectrale, nous obtenons le spectre de puissance :

$$P_0 = p_0$$

$$P_1 = p_0 + p_1$$

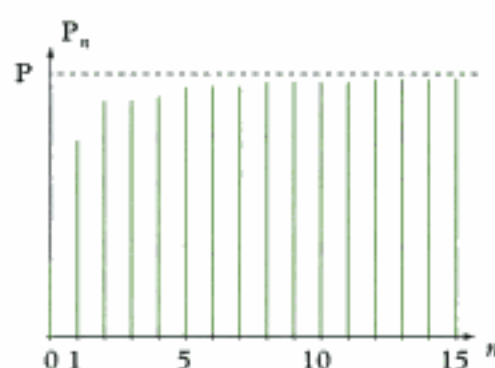
$$P_2 = p_0 + p_1 + p_2 = P_1 + p_2$$

$$P_3 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = P_2 + p_3 \dots$$

Nous pouvons calculer la valeur limite de ce spectre de puissance :

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A^2 dt = \frac{a}{T} A^2 = \alpha A^2.$$

Sur la figure ci-après, le spectre de puissance est représenté pour $\alpha = 0,3$ jusqu'au 16^e harmonique. (La ligne horizontale en pointillé représente la limite.)



Réponse indicielle d'un système linéaire

Introduction

On appelle réponse indicielle d'un circuit sa réponse à une excitation sous la forme d'un échelon unitaire en entrée. La réponse indicielle peut permettre une étude expérimentale des caractéristiques du circuit.

Plan du chapitre 2

A. Réponse indicielle d'un système du premier ordre	42
1. Réponse indicielle	42
2. Système du premier ordre fondamental	42
3. Caractérisation d'un système du premier ordre	43
B. Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre	44
1. Système du deuxième ordre fondamental	44
2. Caractérisation d'un système du deuxième ordre	46
3. Temps de réponse d'un système du deuxième ordre	49
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	50
Énoncés des exercices	55
Solution des exercices	57

A. Réponse indicielle d'un système du premier ordre

A.1. Réponse indicielle

Définition 1

La **réponse indicielle** $g(t)$ d'un système est le signal obtenu en sortie de ce système lorsqu'un échelon unité $u(t)$ ¹ est appliqué en entrée.

1. La fonction échelon unité est définie par :

- $u(t) = 0$ pour $t < 0$
- $u(t) = 1$ pour $t > 0$.

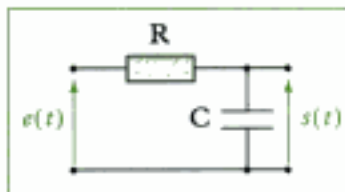


Fig. 1 - Circuit du premier ordre fondamental.

2. Il est évidemment possible de mettre directement ce circuit en équation, mais nous allons appliquer les acquis du chapitre précédent en établissant la fonction de transfert, puis en déduisant de celle-ci l'équation différentielle.

Si nous notons F la transformation qui caractérise l'action du système, nous avons pour la réponse indicielle :

$$g(t) = F[u(t)].$$

A.2. Système du premier ordre fondamental

Sur la figure 1, le circuit RC est initialement au repos, c'est-à-dire que le condensateur est déchargé à $t = 0$. Pour déterminer sa réponse indicielle, il faut connaître l'équation différentielle² reliant le signal de sortie $s(t)$ au signal d'entrée $e(t)$.

Le circuit peut être assimilé à un pont diviseur pour lequel la tension $e(t)$ est appliquée aux bornes des dipôles R et C en série, et la tension $s(t)$ est prélevée aux bornes du condensateur. D'où, en notation complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C}.$$

En utilisant la variable $p = j\omega$, nous pouvons écrire :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{Cp}$$

qui conduit à l'expression :

$$H(p) = \frac{\frac{1}{Cp}}{R + \frac{1}{Cp}} = \frac{1}{1 + RCp}.$$

Nous en déduisons une relation entre les signaux $s(t)$ et $e(t)$ que nous pouvons mettre sous la forme suivante :

$$(1 + RCp)\underline{s}(t) = \underline{e}(t), \text{ d'où }^3 : s(t) + RC \frac{ds(t)}{dt} = e(t).$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre dite *fondamentale*, car aucune dérivée du signal d'entrée n'est présente. Pour obtenir la réponse indicielle du circuit RC, il faut donc résoudre l'équation différentielle :

$$s(t) + RC \frac{ds(t)}{dt} = 1, \text{ pour } t > 0.$$

La solution de cette équation est la superposition de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation complète. D'où, compte tenu des conditions initiales⁴ :

$$g(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = RC \text{ constante de temps du circuit.}$$

3. On remplace chaque multiplication par p par une dérivation par rapport au temps.

4. La résolution de cette équation a été étudiée en première année.

A.3. Caractérisation d'un système du premier ordre

A.3.1 - Constante de temps et amplification statique

Définition 2

Un **filtre du premier ordre fondamental** (ou *principal*) est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = H_0 e(t).$$

- La grandeur τ , homogène à un temps, est appelée *constante de temps* du circuit.
- La grandeur H_0 , sans dimension, est l'*amplification statique* du filtre.

D'après le calcul du § A.2, la réponse indicielle d'un tel filtre, supposé initialement au repos ($g(0) = 0$), est¹ :

$$g(t) = H_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Nous avons tracé cette réponse indicielle sur la **figure 2**. Nous y avons également matérialisé certaines caractéristiques géométriques qui peuvent aider à une détermination expérimentale² de l'amplification statique H_0 et de la constante de temps τ .

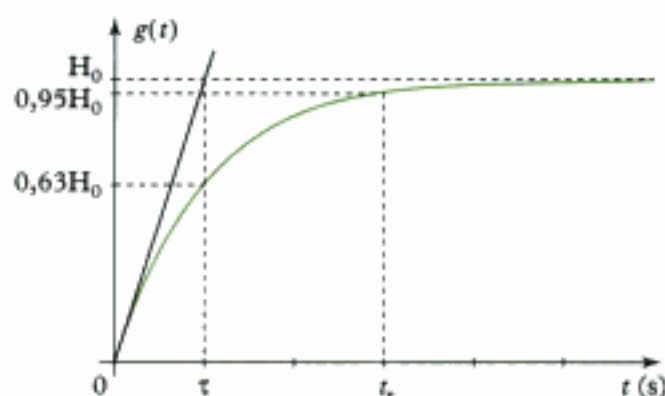


Fig. 2 - Réponse indicielle d'un filtre du premier ordre ($\tau > 0$), t_r représentant le temps de réponse à 5 %.

- Pour déterminer l'amplification statique, l'enregistrement doit être suffisamment long afin d'atteindre le régime stationnaire. La courbe tend en effet vers une asymptote horizontale, dont l'ordonnée donne H_0 .
- Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la constante de temps. Par exemple, si nous calculons la valeur prise par la réponse indicielle pour $t = \tau$, nous avons :

$$g(\tau) = H_0 \left(1 - \frac{1}{e} \right) = \frac{(e-1)}{e} H_0 = 0,63 H_0.$$

La valeur de τ est donc donnée par l'abscisse du point d'intersection de la réponse indicielle du filtre avec la droite horizontale d'ordonnée $0,63 H_0$.

La tangente à l'origine de la réponse indicielle permet également de mesurer la constante de temps. La pente de la tangente de la réponse indicielle à un instant t est :

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{H_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ soit à l'origine } (t = 0^+) : \frac{H_0}{\tau}.$$

L'abscisse du point d'intersection de la tangente à l'origine de la réponse indicielle avec l'asymptote horizontale est donc égale à τ .

1. Le filtre étant un système linéaire nous avons multiplié le résultat obtenu pour le circuit RC par l'amplification statique.

2. Par exemple, à l'aide d'un oscilloscope.

A.3.2 - Rapidité et temps de réponse

La constante de temps τ détermine la rapidité de réponse du système, c'est-à-dire sa capacité à suivre une variation brusque de l'entrée. Cette rapidité est quantifiée par le temps de réponse du système.

Définition 3

Le **temps de réponse** t_r d'un système, défini à ε , est la durée au bout de laquelle l'écart relatif de la réponse indicielle à la valeur finale est inférieur à ε :

$$\forall t \geq t_r, \text{ on a : } \frac{|H_0 - g(t)|}{H_0} \leq \varepsilon.$$

Sur la [figure 2](#), nous avons indiqué le temps de réponse à 5 % pour le filtre du premier ordre fondamental. Remarquons que la constante de temps correspond au temps de réponse¹ à 37 %.

Avec l'expression de la réponse indicielle, nous pouvons écrire :

$$\frac{H_0 - g(t)}{H_0} = \frac{H_0 - H_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{H_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Nous pouvons donc facilement exprimer le temps de réponse t_r en fonction de la référence ε choisie ([tableau 1](#)) :

$$\frac{H_0 - g(t_r)}{H_0} = e^{-\frac{t_r}{\tau}} = \varepsilon \Leftrightarrow t_r = -\tau \ln \varepsilon.$$

Nous pouvons vérifier sur la [figure 2](#) que le temps de réponse à 5 % est très proche de 3τ .

ε	$\frac{t_r}{\tau}$
37 %	1
10 %	2,3
5 %	3
2 %	3,9
1 %	4,6
1 ‰	6,9

Tableau 1 - Temps de réponse d'un filtre du premier ordre pour diverses références.

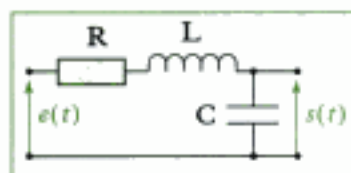


Fig. 3 - Circuit RLC série.

2. Voir chapitre 1, § A.4.1.

3. Celles-ci se déduisent des propriétés bien connues du condensateur : la charge d'un condensateur est proportionnelle à la tension à ses bornes ; l'intensité traversant un condensateur est proportionnelle à la dérivée de sa charge.

B. Réponse indicielle d'un système du deuxième ordre

B.1. Système du deuxième ordre fondamental

Considérons le filtre constitué du circuit RLC série ([fig. 3](#)), le signal d'entrée étant la tension $e(t)$ et le signal de sortie la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur. L'équation différentielle caractérisant ce circuit s'écrit² :

$$LC \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t).$$

Supposons le circuit au repos à $t = 0$: le condensateur est déchargé et l'intensité du courant dans la bobine est nulle. Ces conditions initiales se traduisent par deux relations³ :

$$s(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(0) = 0.$$

Pour obtenir la réponse indicielle du circuit RLC, il faut donc résoudre l'équation différentielle définie par :

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 1 & \text{pour } t > 0 \\ s(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(0) = 0. \end{cases}$$

La solution d'une telle équation est la somme de deux fonctions :

- la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) ou *réponse libre* du système ;
- une solution particulière de l'équation complète, correspondant au *régime permanent*.

La solution générale de l'équation homogène, étudiée en première année, est obtenue à partir des racines de l'équation caractéristique normalisée¹ associée :

$$r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0.$$

Pour simplifier les calculs, nous introduisons, comme en première année, la *pulsation propre* ω_0 et le *coefficient d'amortissement* m du circuit. L'équation caractéristique s'écrit donc :

$$r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0,$$

d'où par identification respectivement des termes de degré 0 et de degré 1 dans les deux équations² :

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2m\omega_0 = \frac{R}{L} \Rightarrow m = \frac{R}{2\omega_0 L} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}. \end{cases}$$

L'équation caractéristique a pour discriminant réduit :

$$\Delta' = m^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(m^2 - 1),$$

dont le signe dépend de m comparé à 1. Selon la valeur du coefficient d'amortissement, l'équation caractéristique admet ainsi deux racines réelles distinctes, une racine réelle double ou deux racines complexes conjuguées.

• **Régime critique ($m = 1$)**

Compte tenu des conditions initiales, la réponse indicielle s'écrit alors :

$$g(t) = 1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.$$

• **Amortissement faible ($m < 1$) : régime pseudo-périodique**

Compte tenu des conditions initiales, la réponse indicielle s'écrit alors :

$$g(t) = 1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega t) \right) e^{-\lambda t},$$

avec : $\lambda = m\omega_0$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$. Cette fonction contient un terme oscillant, mais comme le *facteur d'amortissement* λ est positif, ces oscillations sont amorties.

• **Amortissement fort ($m > 1$) : régime aperiodique**

Compte tenu des conditions initiales, la réponse indicielle s'écrit alors :

$$g(t) = 1 + \frac{r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1}, \text{ avec : } \begin{cases} r_1 = -\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \\ r_2 = -\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}). \end{cases}$$

En cas d'amortissement fort, le régime de fonctionnement du système est dit *apériodique*, par opposition à la réponse indicielle en faible amortissement.

La figure 4 illustre les trois régimes. Le régime critique est tracé en trait plein, le régime aperiodique (pour $m = 3$) en tirets et le régime pseudo-périodique (pour $m = 0,1$) en pointillés.

1. Normalisée signifie que le coefficient du terme du deuxième degré doit être 1. Nous avons donc divisé ici par la quantité LC .

2. Remarquons que les paramètres ω_0 et m sont positifs.

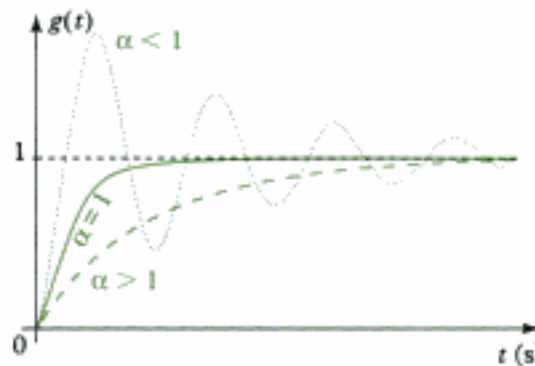


Fig. 4 - Les trois régimes de la réponse indicielle d'un circuit RLC série.

B.2. Caractérisation d'un système du deuxième ordre

Définition 4

Un **filtre du deuxième ordre fondamental** (ou *principal*) est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$s(t) + \frac{2m}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} = H_0 e(t).$$

- La grandeur ω_0 , homogène à l'inverse d'un temps, est la *pulsation propre* du circuit. Son inverse $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ est la *constante de temps*.
- La grandeur m , sans dimension, est le *coefficient d'amortissement*.
- La grandeur H_0 , sans dimension, est l'*amplification statique* du filtre.

Nous supposons d'une part que la pulsation propre et le coefficient d'amortissement sont positifs, d'autre part que les conditions initiales se traduisent par deux relations indiquant que le signal de sortie et sa dérivée sont nuls à l'instant $t = 0$:

$$s(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(0) = 0.$$

D'après le calcul du § B.1, la réponse indicielle d'un tel filtre dépend de la valeur du coefficient d'amortissement m . Commençons par le régime critique, qui sépare les régimes faiblement et fortement amortis.

B.2.1 - Système à amortissement critique

Lorsque le coefficient d'amortissement est égal à 1, la réponse indicielle du filtre de deuxième ordre peut se mettre sous la forme¹ (fig. 5) :

$$g(t) = H_0 [1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}].$$

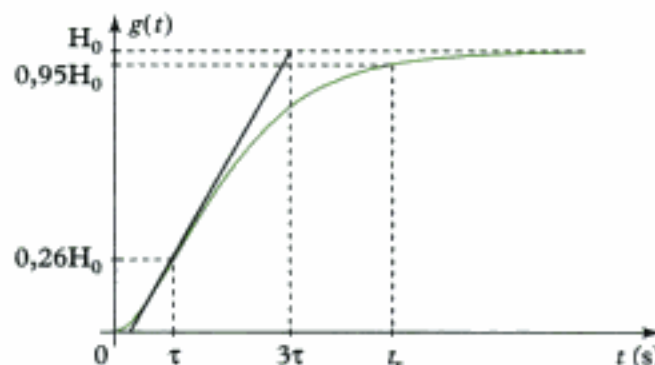


Fig. 5 - Réponse indicielle d'un filtre du deuxième ordre en régime critique. Le temps de réponse à 5 % est noté t_r .

1. Le filtre étant un système linéaire, nous avons multiplié le résultat du § B.1 par l'amplification statique.

1. La dérivée est nulle.

2. Il en est de même de la mesure expérimentale du temps de réponse t_r . On a en effet, par exemple :

$$\begin{aligned} t_r(5\%) &= 4,7\tau \\ t_r(2\%) &= 5,8\tau. \end{aligned}$$

3. Le filtre étant un système linéaire, nous avons multiplié le résultat du § B.1 par l'amplification statique.

4. On peut aussi définir la pseudo-période T par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- Comme avec le filtre du premier ordre, pour déterminer l'amplification statique, l'enregistrement doit être suffisamment long afin d'atteindre le régime stationnaire. La courbe tend vers une asymptote horizontale, dont l'ordonnée donne H_0 .
- La réponse indicielle a une tangente horizontale¹ en $t = 0$ et tend vers une asymptote horizontale en l'infini. Elle présente donc un point d'inflexion dont on peut montrer qu'il correspond à l'instant $t_i = \tau$. D'autre part, la tangente au point d'inflexion I coupe l'asymptote $y = H_0$ pour :

$$t_0 = \frac{3}{\omega_0} = 3\tau.$$

La détermination de la tangente au point d'inflexion² I peut donc donner une indication de la constante de temps τ (ou de la pulsation propre ω_0) d'un filtre du deuxième ordre en régime critique.

B.2.2 - Système à faible amortissement

Lorsque le coefficient d'amortissement est inférieur à 1, la réponse indicielle du filtre de deuxième ordre peut se mettre sous la forme³ (fig. 6) :

$$g(t) = H_0 \left[1 - \left(\cos(\omega t) + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega t) \right) e^{-\lambda t} \right]$$

avec : $\lambda = m\omega_0$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$.

Définition 5

Pour un filtre du deuxième ordre en régime faiblement amorti ($m < 1$) :

- la grandeur $\lambda = m\omega_0$ est le **facteur d'amortissement** ;
- la grandeur $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ est la **pseudo-pulsation**⁴.

Il est possible de modifier l'expression du terme oscillant pour écrire la réponse indicielle sous la forme suivante :

$$g(t) = H_0 \left[1 - \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1-m^2}} e^{-\lambda t} \right]$$

avec : $\cos \varphi = \frac{1}{C} = \sqrt{1-m^2}$ et $\sin \varphi = \frac{-m}{C\sqrt{1-m^2}} = -m$.

La réponse indicielle est tracée sur la figure 6. Elle tend vers une asymptote horizontale dont l'ordonnée donne l'amplification statique H_0 .

La pseudo-période T des oscillations amorties peut être déterminée grâce aux abscisses des points intersections de la réponse indicielle avec l'asymptote horizontale.

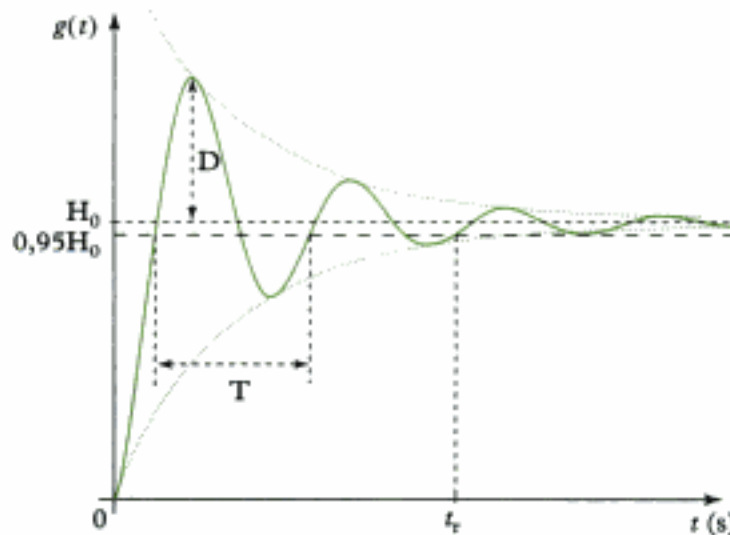


Fig. 6 - Réponse indicielle d'un filtre du deuxième ordre en régime pseudo-périodique. Le temps de réponse à 5 % est noté t_r .

1. Un entier n pair correspond à un minimum et un entier n impair à un maximum.

2. Attention, ces courbes ne sont pas des enveloppes à la courbe $g(t)$.

3. Il est possible de définir une propriété identique avec les minima.

4. Que l'on peut aussi écrire :

$$\delta = \frac{2\pi\lambda}{\omega} = \frac{2\pi m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

5. Le filtre étant un système linéaire, nous avons multiplié le résultat du § B.1 par l'amplification statique.

6. Ces deux quantités vérifient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} r_1 r_2 &= \omega_0^2 \\ r_1 + r_2 &= -2m\omega_0 \\ \frac{r_1}{r_2} &= (m + \sqrt{m^2 - 1})^2 \\ r_2 - r_1 &= 2\omega_0 \sqrt{m^2 - 1}. \end{aligned}$$

Les extremums de la réponse indicielle sont les points d'abscisses¹ $t = n\frac{T}{2}$ situés sur les courbes² (en pointillés sur la figure 6) :

$$g_{\max}(t) = H_0(1 + e^{-\lambda t}) \quad \text{et} \quad g_{\min}(t) = H_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

Definition 6

Pour un filtre du deuxième ordre en régime faiblement amorti ($m < 1$), on appelle **dépassement** l'amplitude d'un maximum mesurée par rapport à l'asymptote.

Notons t_k l'instant du $k^{\text{ième}}$ maximum ($k \geq 1$) :

$$t_k = (2k - 1)\frac{T}{2} = (2k - 1)\frac{\pi}{\omega}.$$

Deux maxima consécutifs sont séparés par une pseudo-période T . Notons d_k le dépassement du $k^{\text{ième}}$ maximum :

$$d_k = H_0(1 + e^{-\lambda t_k}) - H_0 = H_0 e^{-\lambda t_k}.$$

Calculons le rapport de deux dépassements consécutifs :

$$\frac{d_k}{d_{k+1}} = \frac{e^{-\lambda t_k}}{e^{-\lambda t_{k+1}}} = e^{\lambda(t_{k+1} - t_k)} = e^{\lambda T}, \text{ indépendant de } k.$$

Definition 7

Pour un filtre du deuxième ordre en régime faiblement amorti ($m < 1$), on appelle **décroissement logarithmique** δ le logarithme du rapport de deux dépassements consécutifs³ :

$$\delta = \ln\left(\frac{d_k}{d_{k+1}}\right) = \lambda T. \quad 4$$

Le premier dépassement, noté D sur la figure 6, peut suffire à évaluer le coefficient d'amortissement m . En effet :

$$D = d_1 = H_0 e^{-\frac{\lambda T}{2}} = H_0 e^{-\frac{\delta}{2}} = H_0 e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1+m^2}}}.$$

Le régime pseudo-périodique est caractéristique d'un filtre du deuxième ordre. Il permet plusieurs mesures redondantes des paramètres m et ω_0 .

B.2.3 - Système à fort amortissement

Lorsque le coefficient d'amortissement est supérieur à 1, la réponse indicielle du filtre de deuxième ordre peut se mettre sous la forme⁵ (fig. 7) :

$$g(t) = H_0 \left(1 + \frac{r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} \right),$$

$$\text{avec}^6 : \begin{cases} r_1 = -\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \\ r_2 = -\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$$

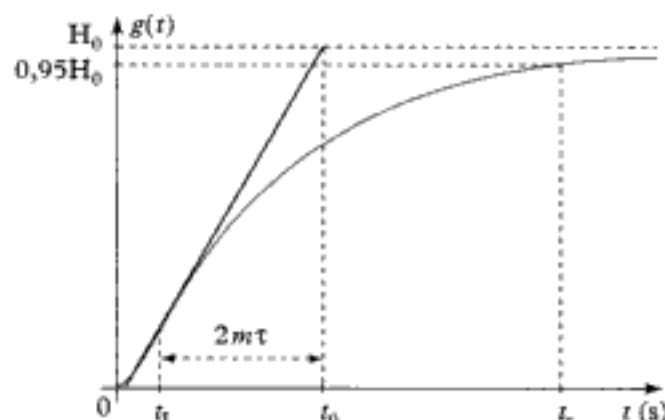


Fig. 7 - Réponse indicielle d'un filtre du deuxième ordre en régime aperiodique. Le temps de réponse à 5 % est noté t_r .

Comme pour le régime critique, la réponse indicielle présente un point d'inflexion. Sans être compliqués, les calculs de l'équation de la tangente au point d'inflexion I sont assez fastidieux et apportent peu d'information. Nous résumons ici les quelques résultats utiles. L'abscisse du point d'inflexion vérifie :

$$t_I = \frac{k}{\omega_0} = k\tau, \text{ avec : } k = \frac{\ln(m + \sqrt{m^2 - 1})}{\sqrt{m^2 - 1}} \leq 1.$$

Si nous notons t_0 le point d'intersection de la tangente au point d'inflexion I avec l'asymptote horizontale, nous pouvons montrer que :

$$t_0 - t_I = \frac{2m}{\omega_0} = 2m\tau.$$

D'autre part, le temps de réponse fournit une seconde relation entre le coefficient d'amortissement m et la pulsation propre ω_0 du circuit.

B.3. Temps de réponse d'un système du deuxième ordre

Contrairement au filtre du premier ordre, il n'existe pas d'expression analytique reliant le temps de réponse aux paramètres caractéristiques m et ω_0 d'un filtre du deuxième ordre. Il est cependant possible de calculer numériquement la quantité $\omega_0 t_r$ en fonction du coefficient m . Nous avons tracé sur la figure 8 le résultat obtenu pour le temps de réponse à 5 %. Cette courbe peut être utilisée comme abaque pour aider à la détermination des caractéristiques d'un filtre du deuxième ordre.

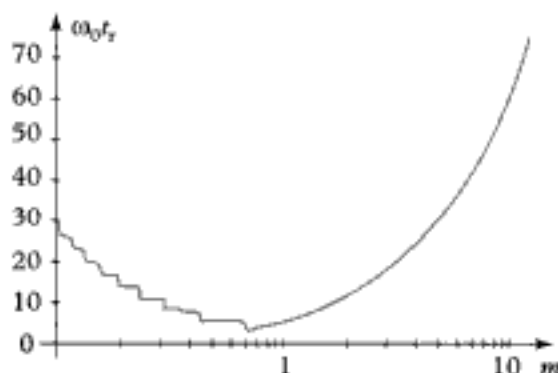


Fig. 8 - Relation du temps de réponse à 5 % avec les paramètres m et ω_0 d'un filtre du deuxième ordre.

Cette courbe permet également de choisir, pour une pulsation propre ω_0 donnée, le coefficient d'amortissement m qui optimise la rapidité d'un filtre du deuxième ordre. Si nous utilisons le temps de réponse à 5 % comme critère, celui-ci est minimal pour $m = 0,70$.

L'essentiel

✓ Réponse indicielle

- La **réponse indicielle** $g(t)$ d'un système est le signal obtenu en sortie de ce système lorsqu'un échelon unité $u(t)$ est appliqué en entrée.
- Le **temps de réponse** d'un système t_r , défini à ε , est la durée au bout de laquelle l'écart relatif de la réponse indicielle à la valeur finale est inférieur à ε (généralement pris à 5 %, éventuellement à 2 %) :

$$\forall t \geq t_r, \text{ on a : } \frac{|H_0 - g(t)|}{H_0} \leq \varepsilon, \text{ avec } H_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t).$$

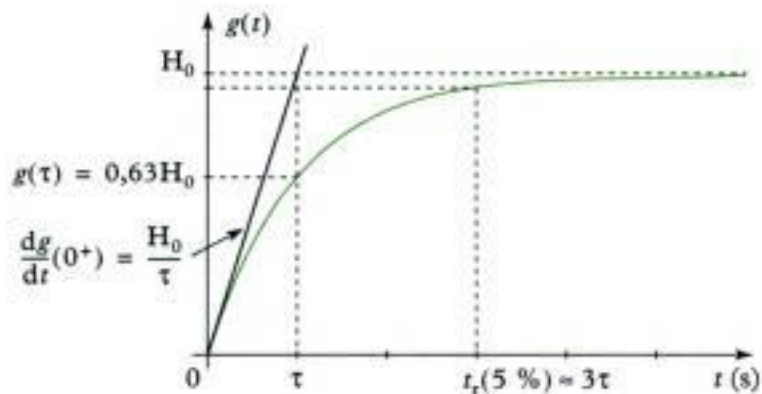
✓ Système du premier ordre

- Un **filtre du premier ordre fondamental** (ou *principal*) est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} = H_0 e(t).$$

- La grandeur τ , homogène à un temps, est la *constante de temps* du circuit.
- La grandeur H_0 , sans dimension, est l'*amplification statique* du filtre.
- La réponse indicielle d'un système du premier ordre fondamental, supposé initialement au repos ($g(0) = 0$), est :

$$g(t) = H_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$



✓ Système du deuxième ordre

- Un **filtre du deuxième ordre fondamental** (ou *principal*) est caractérisé par une équation différentielle de la forme :

$$s(t) + \frac{2m}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} = H_0 e(t).$$

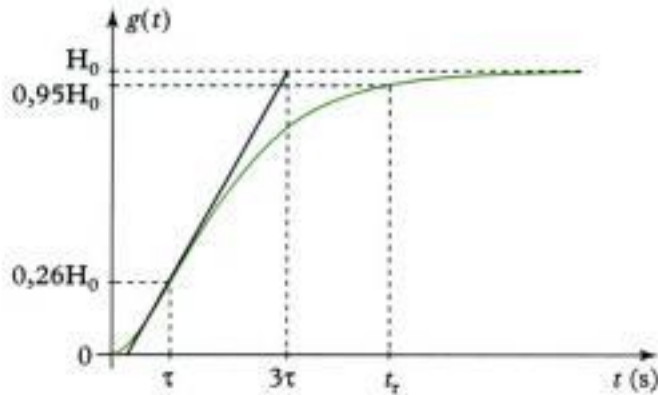
- La grandeur ω_0 , homogène à l'inverse d'un temps, est la *pulsation propre* du circuit. Son inverse $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ est la *constante de temps*.
- La grandeur m , sans dimension, est le *coefficient d'amortissement*.
- La grandeur H_0 , sans dimension, est l'*amplification statique* du filtre.

Pour la suite, nous supposons que les conditions initiales se traduisent par les relations :

$$s(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}(0) = 0.$$

- La réponse indicielle d'un filtre du **deuxième ordre en régime critique** ($m = 1$) s'écrit :

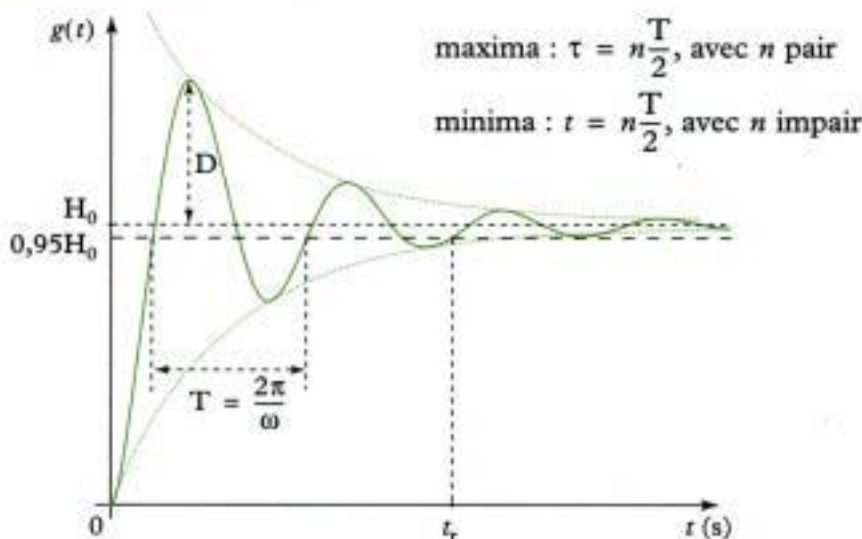
$$g(t) = H_0[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}].$$



- La réponse indicielle d'un filtre **du deuxième ordre en régime pseudo-périodique** ($m < 1$) s'écrit :

$$g(t) = H_0 \left[1 - \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-\lambda t} \right], \text{ avec : } \begin{cases} \lambda = m\omega_0 \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \end{cases}$$

λ est le *facteur d'amortissement* du filtre et ω sa *pseudo-pulsation*.



On appelle **dépassement** l'amplitude d'un maximum mesurée par rapport à l'asymptote. Connaissant l'amplification statique H_0 , le premier dépassement permet de déterminer le coefficient m :

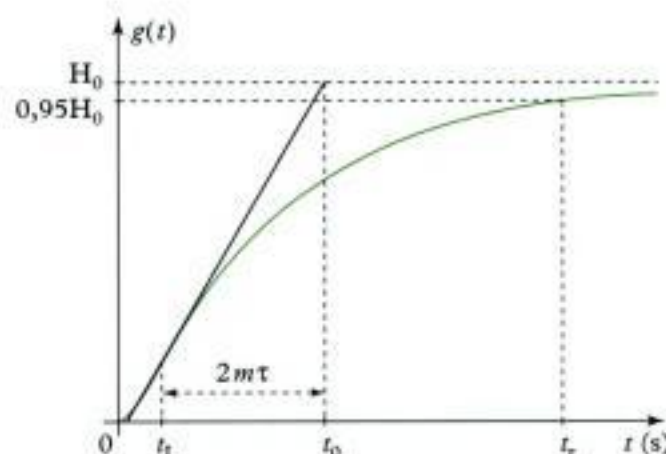
$$D = d_1 = H_0 e^{-\frac{\lambda T}{2}} = H_0 e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1 - m^2}}}.$$

On appelle **décrément logarithmique** δ le logarithme du rapport de deux dépassements consécutifs :

$$\delta = \ln\left(\frac{d_k}{d_{k+1}}\right) = \lambda T = \frac{2\pi\lambda}{\omega} = \frac{2\pi m}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

- La réponse indicielle d'un filtre du **deuxième ordre en régime apériodique** ($m > 1$) s'écrit :

$$g(t) = H_0 \left(1 + \frac{r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} \right), \text{ avec : } \begin{cases} r_1 = -\omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1}) \\ r_2 = -\omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$$



Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment utiliser les conditions initiales lors de la résolution d'une équation différentielle ?

→ Savoir faire

- ❶ Déterminer la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) : c'est la *réponse libre*.
- ❷ Trouver une solution particulière de l'équation complète : c'est le *régime permanent*.
- ❸ Écrire la solution générale de l'équation complète comme la somme de la réponse libre et du régime permanent.
- ❹ Utiliser les conditions initiales pour déterminer les paramètres de la réponse libre (un paramètre à déterminer pour une équation du premier ordre, deux paramètres à déterminer pour une équation du deuxième ordre). Dans un circuit électrique, on peut utiliser :
 - la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ;
 - la continuité de l'intensité du courant circulant dans une bobine.

→ Application

Considérons la charge d'un condensateur dans un circuit RLC série (*cf.* figure 4 du cours). Nous savons que la tension aux bornes du condensateur obéit à une équation différentielle du second ordre :

$$LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = E, \text{ pour } t > 0.$$

Dans ce circuit, initialement au repos, la résistance R est égale à la résistance critique R_C :

$$R = R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Déterminer l'expression de u_C en fonction du temps.

Solution

- ① Pour la valeur critique R_C de la résistance, le coefficient d'amortissement m du circuit est égal à 1 et le discriminant réduit Δ' de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène sans second membre est nul. La réponse libre du système est donc de la forme :

$$u_2(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- ② Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante $u_1(t) = E$, qui correspond au régime permanent.
- ③ La solution générale de l'équation complète est la somme de la réponse libre u_2 et du régime permanent u_1 :

$$u_C(t) = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

- ④ Nous devons déterminer les paramètres A et B à partir des conditions initiales. Le circuit étant au repos à $t = 0$, les conditions initiales s'écrivent :

$$u_C(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad i(0^+) = 0.$$

Or, d'après la relation entre la tension aux bornes d'un condensateur et le courant qui le traverse :

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C[B e^{-\omega_0 t} - \omega_0(A + Bt)e^{-\omega_0 t}].$$

Les deux conditions initiales donnent donc le système :

$$\begin{cases} u_C(0^+) = 0 \Rightarrow E + A = 0 \Rightarrow A = -E \\ i(0^+) = 0 \Rightarrow B - \omega_0 A = 0 \Rightarrow B = \omega_0 A = -\omega_0 E \end{cases}$$

La tension aux bornes du condensateur a donc pour expression en fonction du temps :

$$u_C(t) = E[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}]$$

Méthode n° 2

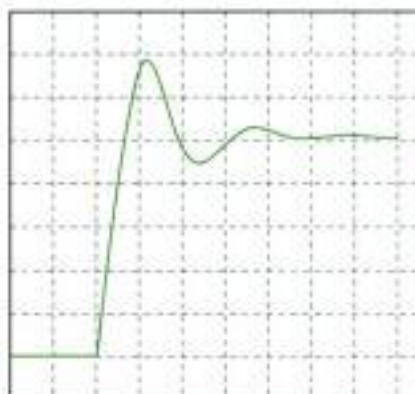
Comment exploiter un enregistrement pour caractériser un système ?

→ Savoir faire

- ① Si l'enregistrement présente des oscillations amorties, le système est nécessairement du second ordre. Déduire l'amplification statique H_0 , la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement m à partir des mesures de l'asymptote, de la pseudo-période T et du premier dépassement (ou du décrétement logarithmique).
- ② Si la tangente à l'origine (pas nécessairement le début de l'enregistrement) n'est pas horizontale (cette observation dépend de la qualité de l'enregistrement), le système est sans doute du premier ordre. Extraire alors la constante de temps τ à l'aide du temps de réponse pour différentes références (37 %, 10 %, 5 %, 2 %, etc.) et de la pente de la tangente à l'origine. Si les résultats obtenus sont égaux (aux erreurs de mesure près), le système peut être assimilé à un système du premier ordre.
- ③ Dans les autres cas, le système est du second ordre en régime aperiodique ou critique. La détermination des paramètres n'est en général pas très précise. On peut s'aider pour cela de la position du point d'inflexion I .

→ Application

On considère une masse M accrochée à un ressort de raideur k vertical et plongée dans un bain d'huile exerçant une force d'amortissement visqueux de coefficient λ . La masse est d'abord maintenue dans une position fixe telle que le ressort ne subit aucune déformation, puis à l'instant $t = 0$, elle est libérée. L'enregistrement suivant représente l'évolution de l'allongement algébrique x du ressort au cours du temps (échelle verticale un carreau pour 1 cm et échelle horizontale un carreau pour 2 s).



À partir de cet enregistrement, indiquer la nature du système et en déduire numériquement les valeurs de ses caractéristiques.

Solution

Comme l'enregistrement présente des oscillations amorties, le système est **du second ordre**. Les caractéristiques à déterminer sont : l'amplification statique H_0 , la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement m . Nous mesurons sur l'enregistrement :

- L'amplification statique (distance entre la ligne de base et l'asymptote horizontale) : $H_0 \approx 5$ cm.
- La pseudo-période (entre les deux premières intersections de la courbe avec l'asymptote) : $T = 5$ s.
- La hauteur du premier dépassement par rapport à l'asymptote : $D = 1,7$ cm.
- Les mesures de H_0 , T et D nous permettent de calculer le produit $P = m\omega_0$. En effet :

$$D = H_0 e^{-\frac{m\omega_0 T}{2}} \Leftrightarrow m\omega_0 = \frac{2}{T} \ln \frac{H_0}{D}.$$

A.N. $m\omega_0 = \frac{2}{5} \ln \frac{5}{1,7} = 0,43 \text{ s}^{-1}$.

- Grâce à la pseudo-période, nous pouvons calculer m :

$$P = m\omega_0 \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}, \text{ d'où : } \frac{2\pi m}{\sqrt{1-m^2}} = PT = 2 \ln \frac{H_0}{D}.$$

En poursuivant le calcul :

$$\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} = \frac{PT}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{H_0}{D} = K \Leftrightarrow m = \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}.$$

A.N. $K = \frac{1}{\pi} \ln \frac{5}{1,7} = 0,34$ et $m = \frac{0,34}{\sqrt{1+0,34^2}} = 0,32$.

- Nous pouvons en déduire aisément ω_0 :

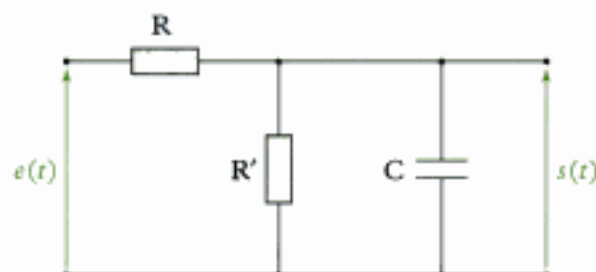
$$\omega_0 = \frac{P}{m} = \frac{0,43}{0,32} = 1,3 \text{ s}^{-1} \text{ ou } \omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-m^2}} = \frac{2\pi}{5\sqrt{1-0,32^2}} \approx 1,3 \text{ s}^{-1}.$$

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Réponse indicielle d'un circuit du premier ordre

Pour le circuit schématisé ci-dessous, donner l'évolution du signal de sortie $s(t)$ pour un signal d'entrée en échelon $e(t) = Eu(t)$ en supposant le condensateur initialement déchargé.



Oral Mines-Ponts, PC, 2002

Ex. 2 Estimation des fuites thermiques d'un calorimètre

On verse dans un calorimètre de capacité thermique Γ à la température extérieure T_{ext} une masse m d'eau à la même température. On y plonge une résistance chauffante, dont on néglige la capacité thermique, de résistance électrique R alimentée par une tension continue U .

On étudie l'évolution du système constitué par l'eau et le calorimètre. On admet que les fuites thermiques peuvent se modéliser par une puissance de perte :

$$p = k(T - T_{\text{ext}}),$$

où T est la température du système (en K). On note c la capacité thermique massique de l'eau.

a) Faire un bilan d'énergie pendant un intervalle de temps dt . En déduire que l'évolution de la température du système est gouvernée par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_M}{\tau}.$$

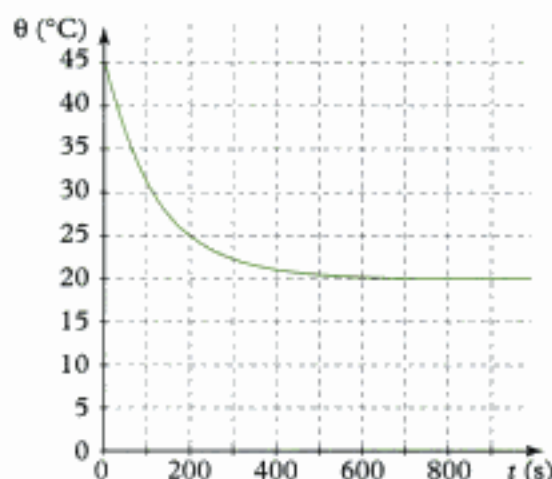
Exprimer τ et T_M en fonction de m , c , Γ , U , R , k et T_{ext} . Quelle est l'interprétation physique de T_M ?

b) Le chauffage est coupé. Refaire le bilan d'énergie pendant un intervalle de temps dt et en déduire l'expression de $T(t)$. On notera T_0 la température initiale du système.

c) On enregistre la température $\theta(t)$ (en $^{\circ}\text{C}$) au cours du refroidissement. Déterminer à partir de cet enregistrement T_{ext} et τ . En déduire k .

Données :

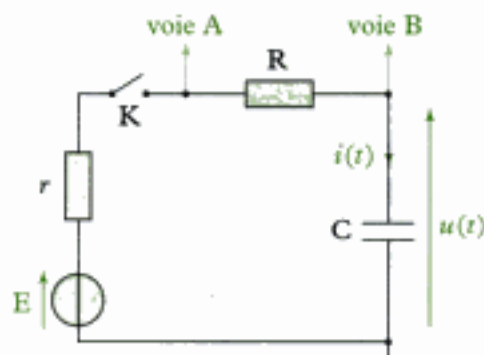
$$m = 200 \text{ g}, c = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} \text{ et } \Gamma = 50 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$



Niveau 2

Ex. 3 Analyse indicielle d'un circuit RC

Nous analysons, à l'aide d'un oscilloscope, le circuit schématisé ci-dessous comportant un générateur de tension (E, r) en série avec une résistance connue R , un condensateur C et un interrupteur K . L'interrupteur est fermé à $t = 0$ alors que le condensateur est déchargé.



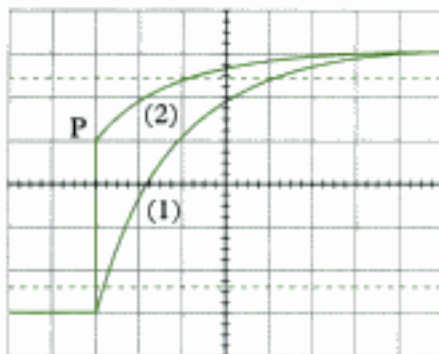
Les voies A et B de l'oscilloscope sont reliées aux deux bornes de la résistance R . Nous notons $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $i(t)$ l'intensité circulant dans le circuit.

a) Exprimer $u(0^+)$ et $i(0^+)$.

b) Établir l'équation différentielle gouvernant la tension aux bornes du condensateur, puis donner l'expression de $u(t)$. On précisera la constante de temps et on déterminera l'expression de t_1 pour lequel :

$$u(t_1) = 0,9 E.$$

L'enregistrement des signaux de l'oscilloscope donne l'oscillogramme suivant, avec les sensibilités 1 V/carreau en vertical et 0,1 ms/carreau en horizontal. Les deux curseurs verticaux (lignes en tirets) sont réglés pour correspondre respectivement à 10 % et 90 % de l'amplitude maximale du signal (1).



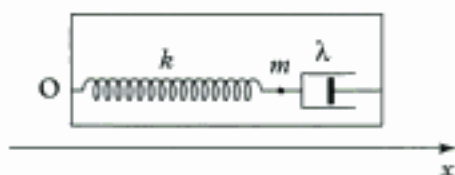
c) Identifier, en justifiant le choix, les enregistrements (1) et (2) aux voies A et B.

d) Préciser l'expression de la tension au point P. Sachant que $R = 100 \Omega$, déterminer les caractéristiques (E , r) du générateur de tension.

e) En déduire la valeur de la capacité C .

Ex. 4 Réponse d'un accéléromètre à un choc

Nous modélisons un accéléromètre horizontal au moyen d'une masse m coulissant sans frottement le long d'une tige horizontale. Cette masse est fixée à l'extrémité d'un ressort, de raideur k , dont l'autre extrémité est solidaire de la boîte enfermant l'accéléromètre. Celle-ci est remplie d'une huile silicone exerçant sur la masse une force d'amortissement visqueux de coefficient λ .



Cet accéléromètre est fixé à un véhicule animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au sol parallèlement à la tige supportant la masse mobile. Nous notons $x(t)$ la position de cette masse par rapport à un repère lié au sol (supposé galiléen) et $x^*(t)$ son déplacement par rapport à sa position de repos dans le boîtier.

a) Montrer que x^* vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{x}^* + 2\alpha\omega_0\dot{x}^* + \omega_0^2 x^* = a(t),$$

où $a(t)$ est la décélération du véhicule. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement α en fonction de m , k et λ .

b) Le véhicule subit un choc frontal modélisé par une décélération sous la forme d'un crêneau de durée τ_c débutant à $t = 0$ et d'amplitude a . À partir de l'équation différentielle, montrer que la nature du mouvement $x^*(t)$ du mobile par rapport au boîtier ne dépend que de la valeur de α .

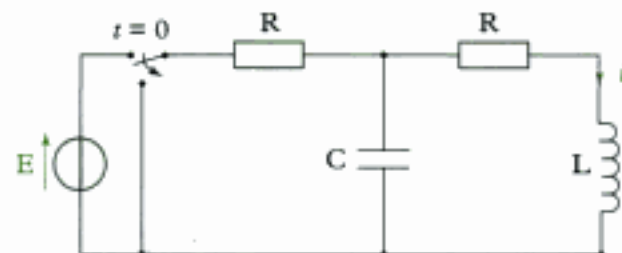
c) L'accéléromètre est conçu de manière à obtenir un retour à l'équilibre du mobile m le plus rapidement possible sans aucune oscillation. Comment faut-il choisir le coefficient de frottement visqueux λ en fonction de m et k ?

d) Établir alors une solution de $x^*(t)$ pendant le choc en fonction de a et ω_0 . Montrer que la vitesse $\dot{x}^*(t)$ passe par un maximum à un instant τ qu'on exprimera en fonction de ω_0 .

Oral Centrale, PSI, 1997

Ex. 5 Régime transitoire du second ordre

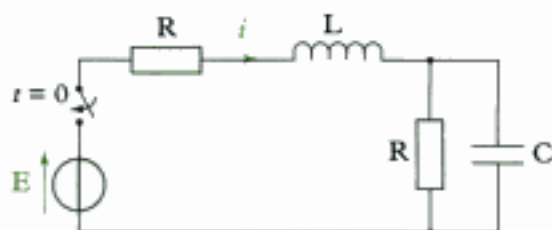
Nous considérons le circuit suivant, pour lequel $R = 1 \Omega$, $C = 1 \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$ et $E = 2 \text{ V}$. Déterminer l'évolution de l'intensité $i(t)$ du courant traversant la bobine en supposant le régime stationnaire établi à $t = 0$ lorsque l'inverseur bascule.



Ex. 6 Intensité dans un circuit

Le condensateur C du circuit schématisé ci-dessous est déchargé à $t = 0$ lorsqu'on ferme l'interrupteur. Étudier l'intensité $i(t)$ du courant qui traverse l'inductance L . On notera :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau.$$

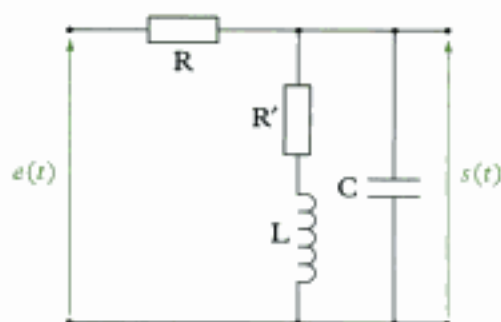


Concours Communs Polytechniques, PSI, 2002

Niveau 3

Ex. 7 Réponse indicielle d'un circuit

Calculer la réponse indicielle du circuit schématisé ci-dessous au repos à l'instant $t = 0$. On donne : $R = 1 \Omega$, $R' = 3 \Omega$, $C = 1 \text{ F}$ et $L = 1 \text{ H}$.



Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

• Notons Z l'impédance du dipôle constitué par le condensateur en parallèle avec la résistance R' . La tension de sortie $s(t)$ est prise aux bornes de ce dipôle, alors que la tension d'entrée $e(t)$ est appliquée à la résistance R en série avec le dipôle Z . En utilisant le pont diviseur, la fonction de transfert du circuit s'écrit :

$$\underline{H}(p) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{Z}{R + Z}, \text{ avec } p = j\omega.$$

Calculons l'impédance Z :

$$Z = C // R' = \frac{Z_C R'}{Z_C + R'} = \frac{\frac{1}{Cp} R'}{\frac{1}{Cp} + R'} = \frac{R'}{1 + R' C p}$$

ce qui nous donne pour la fonction de transfert :

$$\underline{H}(p) = \frac{\frac{R'}{1 + R' C p}}{R + \frac{R'}{1 + R' C p}} = \frac{R'}{R(1 + R' C p) + R'} = \frac{R'}{R R' C p + (R + R')}$$

L'équation différentielle reliant les signaux $s(t)$ et $e(t)$ s'en déduit aisément. Nous avons en effet :

$$[R R' C p + (R + R')] \underline{s}(t) = R' \underline{e}(t)$$

soit, en remplaçant p par une différentiation en notation réelle :

$$R R' C \frac{ds}{dt} + (R + R')s = R' e$$

et après normalisation :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{R + R'}{R R' C} s = \frac{1}{R C} e$$

• L'équation homogène (sans second membre) a pour solution générale :

$$s(t) = a e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{R R' C}{R + R'}$$

Pour $t > 0$, une solution particulière de l'équation complète est la solution constante :

$$s(t) = \frac{R'}{R + R'} e(t) = \frac{R'}{R + R'} E.$$

Pour $t > 0$, la solution générale de l'équation complète a donc pour expression :

$$s(t) = \frac{R'}{R + R'} E + a e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le paramètre a est déterminé par les conditions initiales. Comme le condensateur est initialement déchargé, nous avons :

$$s(0^+) = 0 \Rightarrow a = -\frac{R'}{R + R'} E, \text{ d'où : } s(t) = \frac{R'}{R + R'} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Exercice 2

a) • Appliquons le premier principe au système {eau + calorimètre} pendant un intervalle de temps dt :

$$dH = dW + dQ.$$

Si la température du système varie de dT pendant la durée dt , sa variation d'entropie dH s'écrit :

$$dH = (mc + \Gamma)dT.$$

L'énergie reçue par le système est l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance chauffante :

$$P_{\text{Joule}} = UI = \frac{U^2}{R}, \text{ d'où : } dW = P_{\text{Joule}}dt = \frac{U^2}{R}dt.$$

Du fait des fuites thermiques, le système échange avec l'extérieur pendant dt la quantité de chaleur :

$$dQ = -pdt = -k(T - T_{\text{ext}})dt.$$

En reportant l'expression de chaque terme dans la relation issue du premier principe, il vient :

$$(mc + \Gamma)dT = \frac{U^2}{R}dt - k(T - T_{\text{ext}})dt.$$

En divisant par dt puis en normalisant, nous obtenons donc l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{k}{mc + \Gamma}T = \frac{1}{mc + \Gamma}\left(\frac{U^2}{R} + kT_{\text{ext}}\right)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_M}{\tau}, \text{ avec : } \tau = \frac{mc + \Gamma}{k} \text{ et } T_M = T_{\text{ext}} + \frac{U^2}{kR}$$

T_M représente la température maximale que peut atteindre le système. Nous sommes alors dans un régime stationnaire, la puissance fournie par effet Joule compensant exactement les fuites thermiques.

b) Lorsque la résistance chauffante n'est plus alimentée, il n'y a plus d'apport d'énergie au système : $dW = 0$. Il vient alors :

$$(mc + \Gamma)dT = -k(T - T_{\text{ext}})dt, \text{ d'où : } \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{\text{ext}}}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{mc + \Gamma}{k}.$$

L'équation homogène (sans second membre) a pour solution générale :

$$T(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Pour $t > 0$, une solution particulière de l'équation complète est la solution constante :

$$T(t) = T_{\text{ext}}.$$

Pour $t > 0$, la solution générale de l'équation complète a donc pour expression :

$$T(t) = T_{\text{ext}} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La condition initiale nous permet de déterminer le paramètre A :

$$T(0) = T_0 = T_{\text{ext}} + A \Leftrightarrow A = T_0 - T_{\text{ext}}, \text{ d'où : } T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Il est facile de déduire de l'expression précédente l'évolution de la température en degrés Celsius :

$$\theta(t) = \theta_{\text{ext}} + (\theta_0 - \theta_{\text{ext}})e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

• Sur l'enregistrement, nous lisons :

– l'ordonnée du point de la courbe à l'origine :

$$\theta_0 = 45\text{ }^{\circ}\text{C};$$

– l'ordonnée de l'asymptote horizontale quand t tend vers l'infini :

$$\theta_{\text{ext}} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}, \text{ soit : } T_{\text{ext}} = 293\text{ K}$$

• Pour extraire la constante de temps de l'enregistrement, nous pouvons calculer la valeur de la température attendue après un intervalle de temps égal à τ :

$$\theta(\tau) = \theta_{\text{ext}} + (\theta_0 - \theta_{\text{ext}})e^{-\frac{\tau}{\tau}} = 20 + \frac{45 - 20}{e} = 29\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Sur l'enregistrement, l'abscisse de l'intersection de la droite horizontale d'ordonnée $29\text{ }^{\circ}\text{C}$ avec la courbe $\theta(t)$ nous donne :

$$\tau = 120\text{ s}$$

• Nous pouvons maintenant calculer le coefficient k :

$$\tau = \frac{mc + \Gamma}{k}, \text{ d'où : } k = \frac{mc + \Gamma}{\tau}.$$

$$\text{A.N. } k \approx \frac{(200 \times 4,18) + 50}{120} = 7,4\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Exercices de niveau 2

Exercice 3

a) Nous savons qu'il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Le condensateur du circuit étant initialement déchargé, sa tension est nulle :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0.$$

Lorsque le circuit est fermé, la loi d'Ohm aux bornes des deux résistances r et R en série s'écrit :

$$E - u(t) = (R + r)i(t), \text{ d'où : } i(t) = \frac{E - u(t)}{R + r}.$$

À l'instant $t = 0^+$, nous avons donc :

$$i(0^+) = \frac{E - u(0^+)}{R + r} = \frac{E}{R + r}.$$

b) La caractéristique courant-tension d'un condensateur fournit la relation :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

En reportant celle-ci dans la loi d'Ohm écrite à la question 1, il vient l'équation différentielle :

$$E - u(t) = (R + r)C \frac{du(t)}{dt}, \text{ soit : } \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \text{ avec } \tau = (R + r)C$$

La solution générale de cette équation a pour expression :

$$u(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ où } A \text{ est une constante.}$$



Le terme exponentiel correspond à la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) associée et le terme constant est une solution particulière de l'équation complète.

La condition initiale nous permet de déterminer la constante A :

$$u(0^+) = E + A = 0 \Leftrightarrow A = -E, \text{ d'où : } u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Le temps t_1 est donné par :

$$u(t_1) = E\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right) = 0,9E \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{t_1}{\tau} = \ln 0,1 \Leftrightarrow t_1 = \tau \ln 10$$

c) • Nous savons que la tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue : la courbe (1) correspond donc à la voie B.

• Vérifions que la courbe (2) correspond bien à la voie A. Celle-ci mesure la tension $e(t)$ fournie par le générateur :

$$e(t) = E - ri(t).$$

Or, la caractéristique courant-tension d'un condensateur fournit la relation :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ d'où : } e(t) = E - rC \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = E\left(1 - \frac{rC}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Nous obtenons une courbe, discontinue en $t = 0$, correspondant à un système du premier ordre ayant même asymptote E que (1). Nous pouvons l'assimiler à la courbe (2).

d) La tension au point P correspond à $e(0^+)$:

$$e(0^+) = E - ri(0^+) = E - r \frac{E}{R+r} = \frac{R}{R+r} E.$$

– La force électromotrice E du générateur est donnée par l'ordonnée de l'asymptote horizontale à la courbe (1) (car $u(t) \rightarrow E$ quant $t \rightarrow \infty$). Graphiquement, nous pouvons lire 6 carreaux verticaux entre la ligne de base pour $t < 0$ et l'asymptote :

$$E = 6 \text{ V}$$

– Le point P est situé 4 carreaux au-dessus de la ligne de base (commune aux deux voies A et B), d'où : $e(0^+) = 4 \text{ V}$. Nous en déduisons la valeur de r :

$$\frac{R}{R+r} = \frac{e(0^+)}{E} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3R = 2(R+r) \Leftrightarrow 2r = R \Leftrightarrow r = \frac{R}{2} = 50 \Omega$$

e) L'abscisse de l'intersection du curseur horizontal 0,9 E avec la courbe (1) donne la valeur de t_1 :

$$t_1 \approx 0,4 \text{ ms, d'où (d'après la question b) : } \tau = \frac{t_1}{\ln 10} = 0,17 \text{ ms.}$$

La valeur de la capacité C se déduit alors de l'expression de la constante de temps τ :

$$\tau = (R+r)C, \text{ d'où : } C = \frac{\tau}{R+r}.$$

A.N. $C = 1,1 \mu\text{F}$

Exercice 4

a) • Nous pouvons exprimer la coordonnée x du mobile par rapport au sol en fonction de celle du point d'accroche O du ressort, lié au véhicule. Nous supposons que le ressort a une longueur l_0 au repos. De manière naturelle, nous choisissons d'écrire :

$$x(t) = x_O(t) + l_0 + x^*(t).$$

Dérivons deux fois par rapport au temps pour calculer l'accélération du mobile :

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}^*(t).$$

• En outre, le mobile est soumis aux forces suivantes :

- son poids, vertical, dirigé vers le bas, de valeur mg ;
 - la réaction de la tige, opposée au poids en l'absence de frottement ;
 - la force de rappel du ressort, horizontale, de valeur algébrique $f_k = -kx^*$ (car opposée à l'allongement algébrique du ressort) ;
 - la force de frottement visqueux, horizontale, de valeur algébrique $f_\lambda = -\lambda \dot{x}^*$ (car opposée à la vitesse relative du mobile par rapport à l'huile immobile dans la boîte).
- En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et en projetant ces forces le long de l'axe x , il vient :

$$-kx^*(t) - \lambda \dot{x}^*(t) = m\ddot{x}(t) = m\ddot{x}_0(t) + m\ddot{x}^*(t)$$

d'où, en regroupant les termes en x^* :

$$m\ddot{x}^*(t) + kx^*(t) + \lambda \dot{x}^*(t) = -m\ddot{x}_0(t).$$

Or $\ddot{x}_0(t)$ représente l'accélération du véhicule : $\ddot{x}_0(t) = -a(t)$, où $a(t)$ est la décélération du véhicule. L'équation différentielle peut donc s'écrire :

$$\ddot{x}^*(t) + \frac{\lambda}{m} \dot{x}^*(t) + \frac{k}{m} x^*(t) = a(t)$$

soit, d'après les notations de l'énoncé :

$$\ddot{x}^*(t) + 2\alpha\omega_0 \dot{x}^*(t) + \omega_0^2 x^*(t) = a(t) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad 2\alpha\omega_0 = \frac{\lambda}{m}.$$

La pulsation propre et le coefficient d'amortissement ont donc pour expression :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\lambda}{2m\omega_0} = \frac{\lambda}{2m\sqrt{k/m}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}}.$$

b) L'équation différentielle pendant le choc s'écrit :

$$\ddot{x}^*(t) + 2\alpha\omega_0 \dot{x}^*(t) + \omega_0^2 x^*(t) = a, \quad \text{où } a \text{ est une constante.}$$

Nous savons que les solutions d'une équation différentielle du second ordre avec second membre constant dépendent uniquement du paramètre α :

- si $\alpha = 1$: régime critique ;
- si $\alpha > 1$: régime aperiodique ;
- si $\alpha < 1$: régime pseudo-périodique.

c) Pour obtenir un retour rapide du mobile à l'équilibre sans oscillations, il faut être dans le régime critique ($\alpha = 1$) :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\sqrt{km}} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 2\sqrt{km}$$

d) En régime critique, la solution générale de l'équation complète s'écrit alors :

$$x^*(t) = a + (A + Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

Supposons le mobile au repos dans sa position d'équilibre avant le choc. Nous pouvons donc formuler deux conditions initiales, qui nous permettront de déterminer les constantes A et B :

$$x^*(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}^*(0^+) = 0.$$

Calculons la vitesse du mobile par rapport au boîtier :

$$\dot{x}^*(t) = Be^{-\omega_0 t} - \omega_0(A + Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

Pour $t = 0^+$, les conditions initiales fournissent le système :

$$\begin{cases} x^*(0^+) = a + A = 0 \\ \dot{x}^*(0^+) = B - \omega_0 A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -a \\ B = -\omega_0 a. \end{cases}$$

Le déplacement relatif du mobile dans le boîtier pendant le choc a donc pour expression :

$$x^*(t) = a - a(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

En dérivant par rapport au temps, nous obtenons pour la vitesse et l'accélération :

$$\dot{x}^*(t) = -a\omega_0 e^{-\omega_0 t} + a\omega_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t} = a\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t}$$

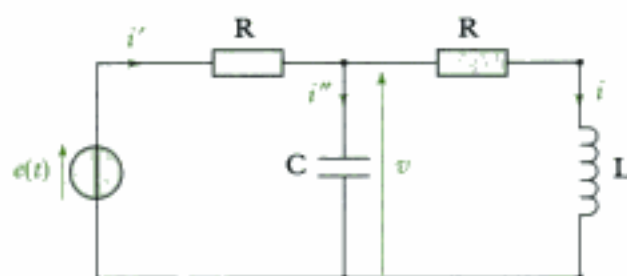
$$\ddot{x}^*(t) = a\omega_0^2 e^{-\omega_0 t} - a\omega_0^3 t e^{-\omega_0 t} = a\omega_0^2(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.$$

L'accélération \ddot{x}^* s'annule en changeant de signe pour $t = \tau = \frac{1}{\omega_0}$: la vitesse passe alors par un **maximum**.

Exercice 5

Sur le schéma ci-dessous, le générateur de tension variable $e(t)$ modélise le générateur de tension continue E en parallèle avec le court-circuit par l'intermédiaire de l'inverseur. Nous avons :

$$e(t) = E[1 - u(t)], \text{ où } u(t) \text{ est la fonction échelon unité.}$$



Les lois de l'électrocinétique nous permettent d'écrire quatre équations indépendantes liant les quatre inconnues i , i' , i'' et v . Ainsi :

$$\begin{cases} (1) \ i'' = C \frac{dv}{dt} & \text{(caractéristique d'un condensateur)} \\ (2) \ v = Ri + L \frac{di}{dt} & \text{(loi d'Ohm et caractéristique d'une bobine)} \\ (3) \ Ri' = e - v & \text{(loi d'Ohm et loi des mailles)} \\ (4) \ i' = i + i'' & \text{(loi des nœuds)} \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) nous permettent d'exprimer i'' en fonction de i :

$$i'' = C \frac{dv}{dt} = RC \frac{di}{dt} + LC \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Les équations (3) et (4) nous permettent d'exprimer i' en fonction de i :

$$i' = \frac{e - v}{R} = \frac{1}{R} \left[e - \left(Ri + L \frac{di}{dt} \right) \right].$$

Reportons les expressions de i' et i'' dans l'équation (4) :

$$\frac{1}{R} \left[e - \left(Ri + L \frac{di}{dt} \right) \right] = i + RC \frac{di}{dt} + LC \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

L'équation différentielle régissant l'évolution de l'intensité i dans la bobine s'écrit donc :

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R} \right) \frac{di}{dt} + 2i = \frac{e}{R},$$

soit après normalisation :

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i = \frac{e}{RLC}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = E & \text{pour } t < 0 \\ e = 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Numériquement, cette équation s'écrit (en $A \cdot s^{-2}$) :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \frac{di}{dt} + 2i = e.$$

L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ associée à l'équation homogène (sans second membre) a pour discriminant réduit :

$$\Delta' = 1 - 2 = -1.$$

Elle admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = 1 - j \quad \text{et} \quad r_2 = 1 + j.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme :

$$i(t) = a \cos(t + \varphi) e^{-t} \quad (\text{en } A).$$

Pour $t > 0$, l'équation complète se confond avec l'équation homogène. Les constantes a et φ sont déterminées à partir des conditions initiales en $t = 0^+$. Une condition est donnée par la continuité de l'intensité du courant dans la bobine, une autre condition est donnée par la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

– Pour $t < 0$, en régime stationnaire (solution constante), l'équation différentielle se réduit à :

$$2i(0^-) = \frac{E}{R} \Leftrightarrow i(0^-) = \frac{E}{2R}, \quad \text{d'où : } i(0^+) = i(0^-) = 1 \text{ A.}$$

– De même, d'après l'équation (2) précédemment établie, pour $t < 0$, en régime stationnaire (solution constante), nous avons :

$$v(0^-) = R i(0^-) + L \frac{di}{dt}(0^-) = R i(0^-), \quad \text{d'où : } v(0^+) = v(0^-) = 1 \text{ V.}$$

Par ailleurs, la tension v aux bornes du condensateur a pour expression :

$$v = a \cos(t + \varphi) e^{-t} - a \sin(t + \varphi) e^{-t} - a \cos(t + \varphi) e^{-t} = -a \sin(t + \varphi) e^{-t}.$$

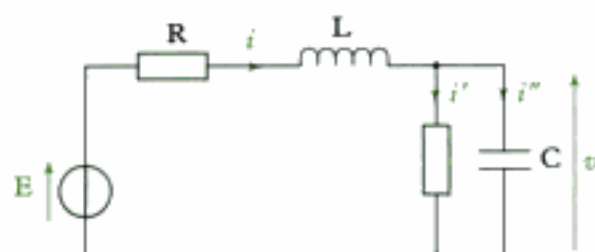
Grâce aux conditions initiales, nous pouvons donc écrire le système suivant :

$$\begin{cases} i(0^+) = a \cos \varphi = 1 \\ v(0^+) = -a \sin \varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \varphi = -1 \\ a = \frac{1}{\cos \varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{4} \\ a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Pour $t > 0$, l'intensité i du courant dans la bobine s'écrit donc (en A) :

$$\boxed{i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-t}}$$

Exercice 6



$$\begin{cases} (1) E - v = Ri + L \frac{di}{dt} \\ (2) v = Ri' \\ (3) i'' = C \frac{dv}{dt} \\ (4) i = i' + i'' \end{cases}$$

En reportant dans les équations (2) et (3) l'expression de v tirée de l'équation (1), nous obtenons :

$$i' = \frac{v}{R} = \frac{E}{R} - i - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i'' = C \frac{dv}{dt} = -RC \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2i}{dt^2}.$$

En reportant ces deux expressions dans l'équation (4), il vient :

$$i = \frac{E}{R} - i - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - RC \frac{di}{dt} - LC \frac{d^2i}{dt^2}$$

d'où l'équation différentielle normalisée régissant l'évolution de l'intensité i :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \frac{di}{dt} + \frac{2}{LC} i = \frac{E}{RLC}.$$

Par ailleurs, d'après les notations de l'énoncé :

$$\frac{L}{R} = RC = \tau \Rightarrow LC = \frac{L}{R} RC = \tau^2.$$

L'équation différentielle peut donc se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di(t)}{dt} + \frac{2}{\tau^2} i(t) = \frac{1}{\tau^2 R} E$$

Une solution particulière de cette équation est la fonction constante :

$$i(t) = \frac{E}{2R}.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène (sans second membre) est :

$$r^2 + \frac{2}{\tau} r + \frac{2}{\tau^2} = 0, \quad \text{avec} \quad \Delta' = \frac{1}{\tau^2} - \frac{2}{\tau^2} = -\frac{1}{\tau^2}, \quad \text{d'où} : r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j \frac{1}{\tau} = -\omega \pm j \frac{1}{\tau}.$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors :

$$i(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

et celle de l'équation complète :

$$i(t) = \frac{E}{2R} + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{1}{\tau}.$$

Les constantes A et B se déterminent à partir des conditions initiales, données par la continuité de l'intensité dans la bobine et par la continuité de la tension aux bornes du condensateur. Ainsi, le circuit étant ouvert jusqu'à $t = 0$, l'intensité initiale est nulle : $i(t=0) = 0$. En outre, le condensateur est initialement déchargé, donc la tension à ses bornes est nulle : $v(t=0) = 0$. En reportant cette condition dans l'équation (1), il vient :

$$E = Ri(0^+) + L \frac{di}{dt}(0^+), \quad \text{d'où} : \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}.$$

Il nous faut donc calculer la dérivée de $i(t)$:

$$\frac{di(t)}{dt} = (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t)e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{soit : } \frac{di(t)}{dt} = \left(\frac{B-A}{\tau} \cos \omega t - \frac{A+B}{\tau} \sin \omega t \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Les deux conditions initiales se traduisent donc sous la forme :

$$\begin{cases} i(0^+) = \frac{E}{2R} + A = 0 \\ \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{B-A}{\tau} = \frac{E}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{E}{2R} \\ B = A + \tau \frac{E}{L} = -\frac{E}{2R} + \frac{E}{R} = \frac{E}{2R} \end{cases}.$$

En reportant A et B dans l'expression de i , nous avons pour $t > 0$:

$$i(t) = \frac{E}{2R} \left[1 + (\sin \omega t - \cos \omega t) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad \text{avec } \omega = \frac{1}{\tau}.$$

Exercice de niveau 3

Exercice 7

• Notons Z l'impédance du dipôle constitué par le condensateur en parallèle avec la résistance R' en série avec la bobine. La tension de sortie $s(t)$ est prise aux bornes de ce dipôle, alors que la tension d'entrée $e(t)$ est appliquée à la résistance R en série avec le dipôle Z. En utilisant le pont diviseur, la fonction de transfert du circuit s'écrit :

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{Z}{R+Z}, \text{ avec } p = j\omega.$$

Calculons l'impédance Z :

$$Z = C \parallel (R' + L) = \frac{Z_C(R' + Z_L)}{Z_C + R' + Z_L} = \frac{\frac{1}{Cp}(R' + Lp)}{\frac{1}{Cp} + R' + Lp} = \frac{R' + Lp}{1 + R'Cp + LCp^2}$$

ce qui nous donne pour la fonction de transfert :

$$\underline{H}(p) = \frac{\frac{R' + Lp}{1 + R'Cp + LCp^2}}{R + \frac{R' + Lp}{1 + R'Cp + LCp^2}} = \frac{R' + Lp}{RLCp^2 + (RR'C + L)p + (R + R')}.$$

L'équation différentielle reliant les signaux $s(t)$ et $e(t)$ s'en déduit aisément. Nous avons en effet :

$$[RLCp^2 + (RR'C + L)p + (R + R')] \underline{s}(t) = (R' + Lp) \underline{e}(t)$$

soit en remplaçant p par une différentiation en notation réelle et après normalisation :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \left(\frac{R'}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{(R + R')}{RLC} s = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt} + \frac{R'}{RLC} e$$



Nous pouvons vérifier que chaque terme est homogène à une tension divisée par le carré d'un temps.

• Numériquement, cette équation s'écrit (en $V \cdot s^{-2}$) :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 4s = \frac{de}{dt} + 3e, \text{ avec } \begin{cases} e(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ e(t) = 1 & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

– L'équation caractéristique associée à l'équation homogène (sans second membre) est :

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0.$$

$r = -2$ est racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$s(t) = (A + Bt)e^{-2t}.$$

– Pour $t > 0$, l'équation complète s'écrit (en $V \cdot s^{-2}$) :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 4s = 3.$$

Nous pouvons choisir une solution constante comme solution particulière de l'équation complète :

$$s(t) = \frac{3}{4} \text{ (en V)}$$

La réponse indicielle peut donc se mettre sous la forme :

$$s(t) = \frac{3}{4} + (A + Bt)e^{-2t}$$



Pour déterminer les constantes A et B , nous utilisons la continuité de la tension aux bornes du condensateur et la continuité de l'intensité du courant dans la bobine.

Le circuit étant initialement au repos, le condensateur est déchargé et l'intensité du courant traversant la bobine est nulle. La première condition se traduit par : $s(t=0) = 0$.

Notons i l'intensité du courant dans la résistance R , i_L celle dans la bobine L ($i_L(t=0) = 0$) et i_C celle dans le condensateur C . La loi des nœuds nous permet d'écrire :

$$i(t) = i_L(t) + i_C(t), \text{ avec } i(t) = \frac{e(t) - s(t)}{R} \text{ et } i_C(t) = C \frac{ds(t)}{dt}.$$

Comme $s(t=0) = 0$ et $i_L(t=0) = 0$, nous avons :

$$\frac{e(0^+)}{R} = C \frac{ds}{dt}(0^+), \text{ d'où : } \frac{ds}{dt}(0^+) = \frac{e(0^+)}{RC} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Par ailleurs, d'après l'expression de la réponse indicielle :

$$\frac{ds(t)}{dt} = Be^{-2t} - 2(A + Bt)e^{-2t}.$$

Numériquement, les conditions initiales fournissent donc le système :

$$\begin{cases} s(0^+) = \frac{3}{4} + A = 0 \\ \frac{ds}{dt}(0^+) = B - 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{4} \\ B = 1 + 2A = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Pour $t > 0$, la réponse indicielle du filtre s'écrit donc (en V) :

$$g(t) = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t\right)e^{-2t}, \text{ soit encore : } g(t) = \frac{1}{4}[3 - (3 + 2t)e^{-2t}]u(t)$$



La fonction échelon $u(t)$ permet d'exprimer la réponse indicielle pour tout $t \neq 0$.

Fonctions à amplificateurs opérationnels

Introduction

L'amplificateur opérationnel, composant de base de l'électronique, permet de réaliser une grande variété de circuits pour le traitement des signaux (amplification, addition, soustraction, dérivation, intégration).

Dans ce chapitre, nous allons rappeler ses propriétés fondamentales, puis effectuer une étude détaillée des différentes fonctions en mettant le plus souvent en évidence les conséquences de certains défauts de l'amplificateur opérationnel.

Plan du chapitre 3

A. L'amplificateur opérationnel (AO)	68
B. La fonction amplification	76
C. La fonction addition	83
D. La fonction soustraction	85
E. La fonction dérivation	86
F. La fonction intégration	91
G. Circuit déphaseur	94
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	96
Énoncés des exercices	101
Solution des exercices	105

1. Pour beaucoup d'AO « classiques » comme par exemple le LM741, on a $\pm E = \pm 15 \text{ V}$.

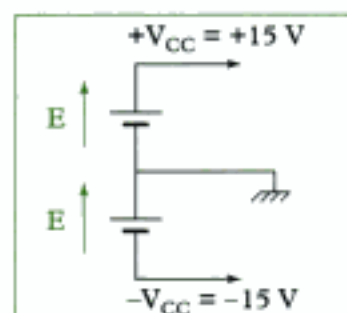


Fig. 1 - Branchement des deux sources de tension symétriques.

2. Le symbole qui est donné ici est celui de la norme européenne. Certains auteurs préfèrent celui de la norme américaine (fig. 3).

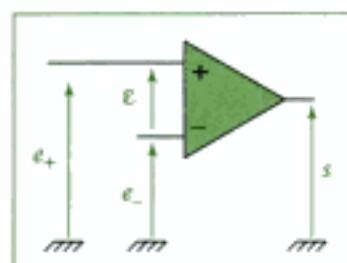


Fig. 3 - Norme américaine.

A. L'amplificateur opérationnel (AO)

Toutes les fonctions qui vont être étudiées par la suite sont basées sur l'amplificateur opérationnel (AO) ; il semble donc utile de rappeler ses propriétés fondamentales et son modèle.

A.1. Description

A.1.1 - Alimentation et entrées

L'AO est un circuit intégré linéaire en général alimenté par deux sources de tension continues symétriques $+E$ et $-E$ (fig. 1) de manière à pouvoir fournir des tensions aussi bien positives que négatives.

En général, les bornes d'alimentation du circuit (notées souvent $+V_{CC}$ et $-V_{CC}$) ne sont pas représentées sur les schémas ; elles sont néanmoins indispensables au fonctionnement du circuit intégré.

L'AO possède deux entrées et une sortie (fig. 2). Une entrée est qualifiée d'entrée inverseuse (mentionnée sur le symbole par un signe $-$) et l'autre d'entrée non inverseuse (mentionnée par un signe $+$).

A.1.2 - Symbole² de l'AO

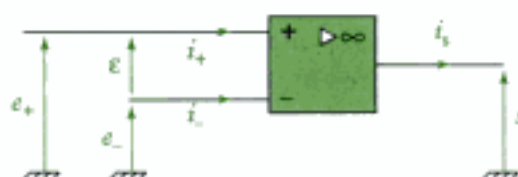


Fig. 2 - Symbole de l'AO.

Le triangle dans le symbole (fig. 2) indique d'une part que ce circuit est amplificateur et d'autre part le sens de circulation de l'information (le signal de sortie est produit à partir des signaux présents sur les entrées).

Le symbole infini, quant à lui, est là pour rappeler que l'amplification de ce circuit est très élevée.

A.2. Caractéristique de transfert

La tension de sortie s est produite à partir de la tension différentielle d'entrée : $e = e_+ - e_-$. L'AO est caractérisé par sa caractéristique statique de transfert $s = f(e)$ qui peut être obtenue expérimentalement (fig. 4).

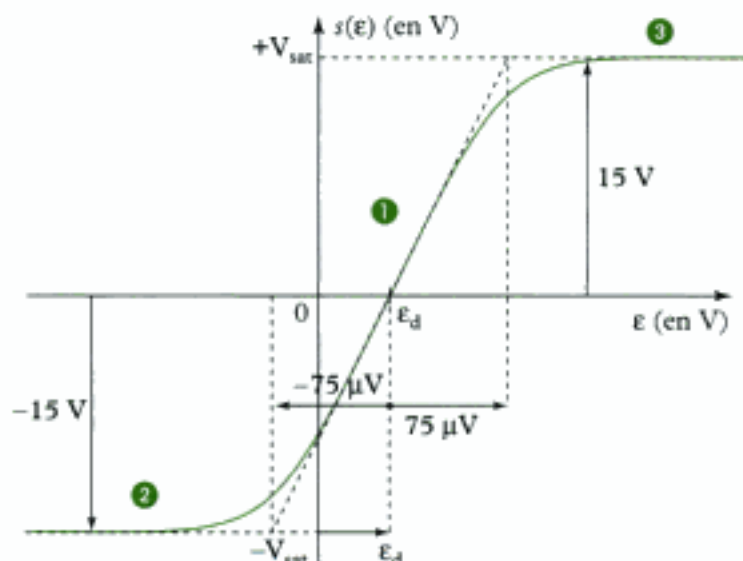


Fig. 4 - Caractéristique de transfert d'un AO.

On peut distinguer dans cette caractéristique trois zones :

- zone ❶ : dite zone « linéaire »
- zones ❷ et ❸ : dites zones « de saturation ».

A.2.1 - Fonctionnement en régime linéaire

Dans la zone dite « linéaire » (partie ❶ de la caractéristique de transfert), la tension s est proportionnelle¹ à $\epsilon - \epsilon_d$ de sorte que nous pouvons écrire :

$$s = \mu(\epsilon - \epsilon_d).$$

• μ représente l'amplification² de l'AO, il vaut typiquement pour un AO classique (LM741) :

$$\mu = \frac{\Delta s}{\Delta \epsilon} = \frac{15 \text{ V}}{75 \mu\text{V}} = 2 \cdot 10^5.$$

Il s'agit d'une amplification très élevée que nous pourrions considérer en première approche infinie (hypothèse de l'AO idéal).

• ϵ_d est appelée tension de décalage ; elle représente la tension ϵ qu'il faut appliquer pour annuler la tension s . Pour un AO classique (LM741) cette tension vaut typiquement : $\epsilon_d = 1 \text{ mV}$. Elle peut monter jusqu'à 5 mV.

Sauf précision contraire, nous considérerons ϵ_d nulle³. Nous écrirons alors dans la zone linéaire :

$$s = \mu\epsilon = \mu(e_+ - e_-).$$

A.2.2 - Saturation de l'AO

Lorsque ϵ atteint, en valeur absolue, une valeur trop élevée (zones ❷ et ❸ de la caractéristique de transfert), l'AO sort du domaine de linéarité ; nous dirons qu'il se « sature ».

Les limites de la tension de sortie s valent :

$$s = +V_{\text{Sat}} \approx +15 \text{ V} \quad \text{ou} \quad s = -V_{\text{Sat}} \approx -15 \text{ V}.$$

Ces valeurs sont dues au fait que la tension de sortie de l'AO ne peut excéder les tensions d'alimentation du circuit : $\pm E = \pm 15 \text{ V}$.

Nous avons donc toujours :

$$|s| \leq V_{\text{Sat}}.$$

Pour $s = \pm V_{\text{Sat}}$, l'AO est dit « saturé ».

A.3. Réaction positive et réaction négative

A.3.1 - Réaction positive

Définition 1

Lorsque l'AO est connecté de telle manière que toute augmentation de sa tension de sortie se traduit par une augmentation de la tension e_+ appliquée sur l'entrée non inverseuse, on dit que l'AO possède une **réaction positive**.

1. On peut remarquer cependant qu'à l'approche de la saturation, la caractéristique s'éloigne de la linéarité. Ce « défaut » est fortement atténué par l'effet d'une réaction négative.

2. Certains auteurs nomment abusivement ce paramètre « gain » de l'AO. Nous préférons réserver l'appellation de gain de l'AO à la grandeur :
 $G = 20 \log(\mu)$
 exprimée en décibels (dB).

3. Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée, que pour bon nombre d'AO, il est possible d'annuler la tension de décalage à l'aide d'un circuit externe réglable. Ce circuit externe est en général constitué d'un potentiomètre connecté à deux bornes auxiliaires de l'AO (fig. 5).

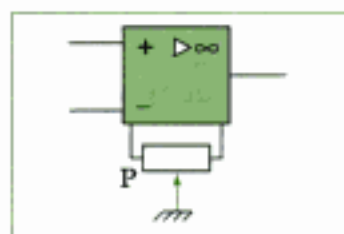


Fig. 5 - P représente un potentiomètre.

En pratique une réaction positive peut être réalisée par un dipôle ou un quadripôle (fig. 6) :

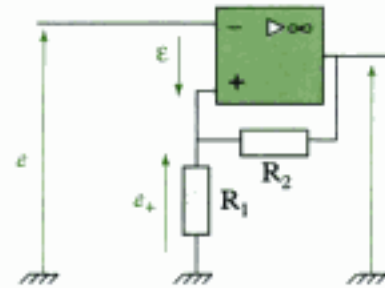


Fig. 6 - Exemple de montage avec réaction positive.

Ici, la résistance R_2 assure une réaction positive.

Supposons une situation initiale d'équilibre, dans laquelle l'AO fonctionne en régime linéaire. Si s augmente indépendamment de e ¹ (on écarte l'AO de l'équilibre), la réaction positive implique que e_+ augmente, donc $\varepsilon = e_+ - e_-$ augmente, ce qui se traduit si l'AO est en régime linéaire par une augmentation supplémentaire de s ($s = \mu\varepsilon$), et ainsi de suite jusqu'à la saturation de l'AO.

Un tel montage ne peut donc pas fonctionner de manière stable en régime linéaire ; il évolue très rapidement vers la saturation.

Propriété 1

Une réaction positive sur un AO implique un **fonctionnement linéaire instable**. En conséquence, un AO avec une réaction positive fonctionne toujours **en saturation**.

A.3.2 - Réaction négative

Définition 2

Lorsque l'AO est connecté de telle manière que toute augmentation de sa tension de sortie se traduit par une augmentation de la tension e_- appliquée sur l'entrée inverseuse, on dit que l'AO possède une **réaction négative** ou **contre-réaction**.

En pratique, une contre-réaction peut être réalisée par un dipôle ou un quadripôle (fig. 7) :

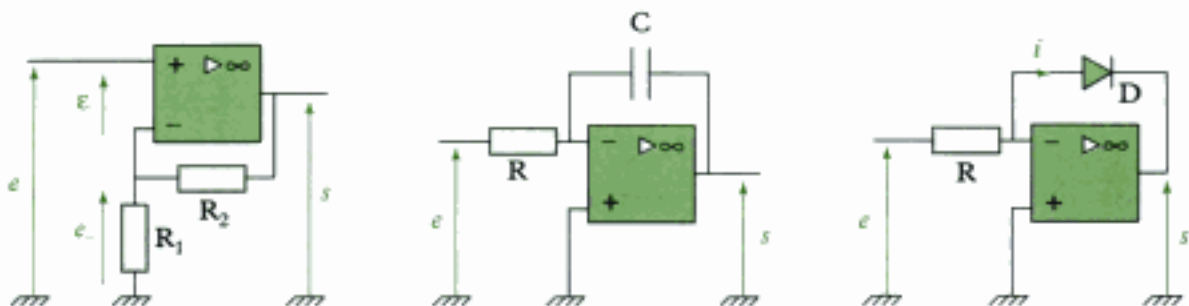


Fig. 7 - Exemples de montages avec réaction négative. Dans le dernier schéma, les propriétés de la diode impliquent que la réaction négative n'est assurée que pour les valeurs de i positives.

Ici, la résistance R_2 , la capacité C ou la diode D permettent une réaction négative.

Supposons une situation initiale d'équilibre, dans laquelle l'AO fonctionne en régime linéaire. Si s augmente indépendamment de e (on écarte l'AO de l'équilibre), la réaction négative implique que e_- augmente, donc $\varepsilon = e_+ - e_-$ diminue. Ce qui se traduit, si l'AO est en régime linéaire, par une diminution de s ($s = \mu \varepsilon$), donc un retour vers la situation d'équilibre.

Propriété 2

Une réaction négative (ou contre-réaction) sur un AO permet¹ un fonctionnement en régime linéaire stable.

1. Le fonctionnement en régime linéaire est ici possible mais pas garanti. La tension de sortie ne pouvant excéder $\pm V_{\text{Sat}}$, l'AO peut se saturer si le régime linéaire implique une tension de sortie trop élevée.

A.3.3 - Réaction positive et négative

Lorsqu'un montage à AO comporte une réaction positive et une réaction négative, c'est en premier lieu la réaction la plus rapide qui l'emporte, et, sinon, la réaction la plus forte.

A.4. Comportement dynamique de l'AO

A.4.1 - Fonction de transfert de l'AO

L'hypothèse d'une amplification $\frac{s}{e}$ constante se vérifie pour un fonctionnement en basses fréquences.

Il est possible d'observer expérimentalement en régime sinusoïdal lorsque la fréquence augmente, que d'une part l'amplification $\frac{s}{e}$ diminue, et que d'autre part l'AO introduit un déphasage entre $s(t)$ et $\varepsilon(t)$.

Définition 3

Pour tenir compte de l'effet de l'augmentation de la fréquence sur les propriétés de l'AO, nous pouvons définir la **transmittance** ou **fonction de transfert** de l'AO, que l'on notera \underline{H} , par la relation suivante :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{\varepsilon} = \frac{s}{e_+ - e_-}$$

s et ε représentent respectivement la tension de sortie et la tension différentielle d'entrée de l'AO.

Propriété 3

Dans la bande de fréquence qui nous intéresse, la transmittance de l'AO peut être assimilée à celle d'un filtre **passe-bas du premier ordre**² :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{AO}}} \quad \text{ou} \quad \underline{H}(jf) = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}$$

2. En réalité, la fonction de transfert de l'AO est celle d'un filtre passe-bas du troisième ordre. L'assimilation à un filtre du premier ordre est une très bonne approximation pour les basses fréquences.

3. Ce qui correspond à une bande passante extrêmement réduite [0 ; 8 Hz]. En fait, comme nous le verrons plus tard, tous les montages à AO fonctionnant en régime linéaire possèdent une réaction négative, ce qui a pour effet d'augmenter la bande passante du montage.

• $H_0 = \mu$ est l'amplification statique de l'AO. Pour l'AO LM741, nous avons typiquement :

$$H_0 = 2 \cdot 10^5.$$

• ω_{AO} et f_{AO} représentent respectivement la pulsation (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et la fréquence (en Hz) de coupure de l'AO. Pour le LM 741, nous avons typiquement :

$$f_{AO} = 8 \text{ Hz}^3, \text{ donc } \omega_{AO} = 2 \times \pi \times 8 = 50,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le gain de l'AO est défini selon :

$$G_{AO} = 20 \log(|H(jf)|).$$

Nous pouvons représenter son diagramme de Bode asymptotique (fig. 8) :

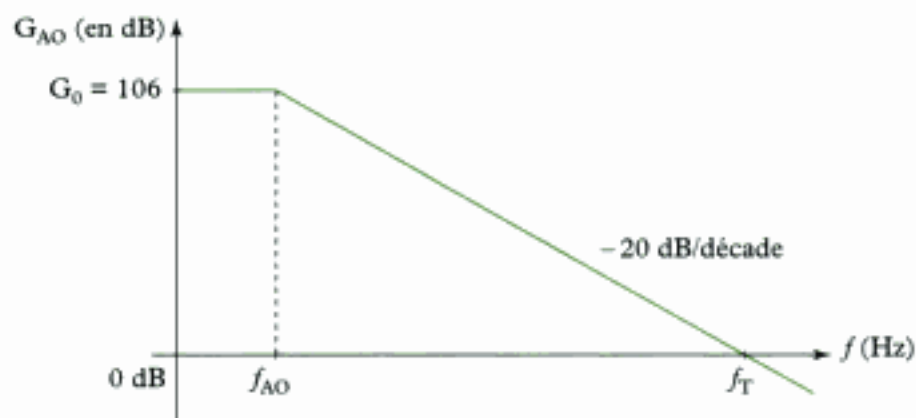


Fig. 8 - Diagramme de Bode asymptotique d'un AO.

La fréquence notée f_T est appelée « fréquence de transition » ; elle correspond à la fréquence pour laquelle le gain est nul.

Par définition, $G_{AO}(f_T)$ vaut 0 dB, donc $|H(jf_T)| = 1$. Pour exprimer f_T , partons de l'expression de $|H(jf)|$:

$$|H(jf)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{AO}}\right)^2}} \approx \frac{H_0}{\frac{f}{f_{AO}}} \quad (\text{car pour } f \gg f_{AO}, \text{ nous avons } \frac{f}{f_{AO}} \gg 1).$$

Donc :

$$|H(jf_T)| = \frac{H_0 f_{AO}}{f_T} = 1.$$

Propriété 4

Comme $|H(jf_T)| = 1$, la **fréquence de transition** est telle que :

$$f_T = H_0 f_{AO}.$$

f_T est aussi appelée « produit amplification \times bande passante » ou abusivement « produit gain-bande passante ».

Pour un LM741, le produit amplification-bande passante vaut typiquement :

$$f_T = H_0 f_{AO} = 2 \cdot 10^5 \times 8 = 1,6 \text{ MHz}.$$

A.4.2 - Vitesse de balayage

L'AO possède une autre limitation dynamique. En effet, la variation de la tension de sortie (exprimée en volts/seconde) ne peut pas excéder en valeur absolue une valeur limite appelée vitesse de balayage ou *slew rate* (SR).

On a ainsi :

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| \leq SR \quad (SR \text{ en V/s}).$$

Pour un AO de type LM741, nous avons typiquement :

$$SR = 0,5 \text{ V}/\mu\text{s}.$$

Cette limitation peut s'observer par une déformation du signal. Par exemple, en appliquant un signal sinusoïdal de fréquence 25 kHz et d'amplitude 10 V à un montage suiveur¹ à AO (fig. 9).

1. Un montage « suiveur » est un amplificateur à amplification unité. Soit une relation entre les signaux de sortie et d'entrée :

$$s = e.$$

Son schéma et ses propriétés sont donnés dans la partie B.2.

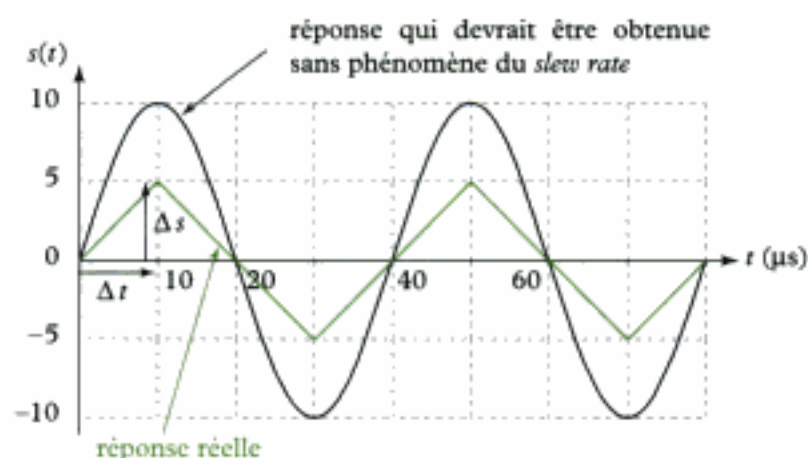


Fig. 9 - Mise en évidence du phénomène du « slew rate » sur un signal d'entrée sinusoïdal.

Le *slew rate* a pour effet de rendre ici le signal de sortie triangulaire, alors que le signal d'entrée est sinusoïdal : il s'agit d'un défaut non linéaire.

Le *slew rate* peut ici se mesurer :

$$SR = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5 \text{ V}}{10 \mu\text{s}} = 0,5 \text{ V}/\mu\text{s}.$$

Il n'apparaît que pour des signaux « rapides » pour lesquels :

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| > SR.$$

Nous pouvons également mettre en évidence ce phénomène sur un autre signal (avec le même montage) en appliquant en entrée un signal carré symétrique d'amplitude 10 V et de fréquence 2,5 kHz (fig. 10) :

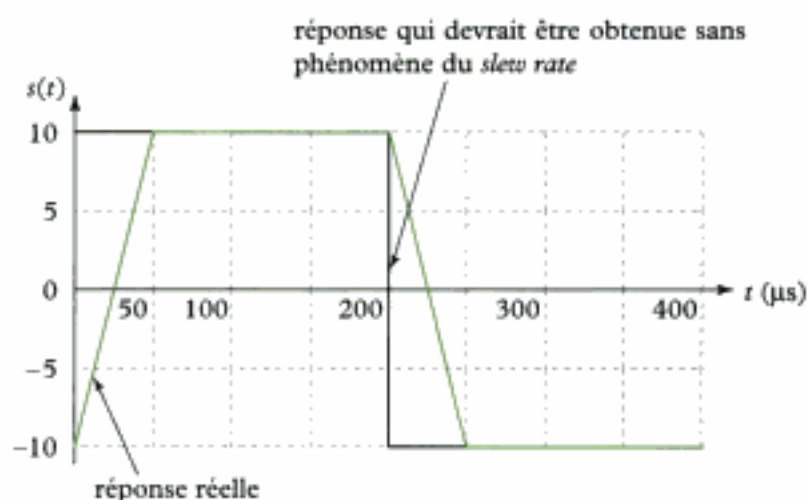


Fig. 10 - Mise en évidence du phénomène du « slew rate » sur un signal d'entrée carrée.

A.5. Propriétés des courants de l'AO

A.5.1 - Courants d'entrée

Les courants consommés par les entrées (notés i_+ et i_-) sont très faibles ; pour un AO de type LM741, par exemple, nous avons toujours :

$$|i_+| \leq 200 \text{ nA} \text{ et } |i_-| \leq 200 \text{ nA}.^1$$

L'hypothèse de l'AO idéal suppose les courants d'entrée nuls.

1. Pour certains AO, tels par exemple le TL081, qualifiés d'AO à « grande impédance d'entrée », ces courants ne dépassent pas quelques pA.

A.5.2 - Courant de sortie

Le courant de sortie i_s dépend des circuits connectés sur la sortie de l'AO.

Dans la plupart des AO, l'intensité de ce courant ne peut excéder une valeur maximum de manière à le protéger. Pour un AO de type LM741, nous avons typiquement :

$$|i_{s\text{Max}}| = 25 \text{ mA.}$$

Une fois cette valeur atteinte, la tension de sortie va chuter.

D'autre part, en boucle ouverte, l'augmentation de l'intensité du courant i_s entraîne une baisse de la tension de sortie s .

Cet effet peut être modélisé par une impédance dite « impédance de sortie du quadripôle » et notée Z_s . Z_s n'excède jamais 500Ω .

A.6. Modèle électrique équivalent de l'AO

Ce modèle ne tient compte que des défauts linéaires, la saturation et le *slew rate* n'apparaissant donc pas sur ce modèle (fig. 11).

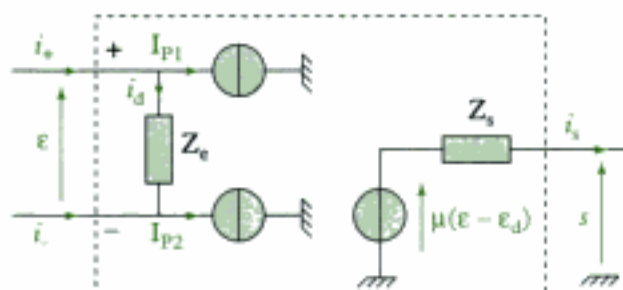


Fig. 11 - Modèle électrique équivalent d'un AO.

1. Les courants de polarisation sont des courants continus indépendants des tensions appliquées sur les entrées ; leurs valeurs peuvent dépendre de la température du composant. On a pratiquement toujours :

$$I_{P1} = I_{P2} = I_P.$$

2. La tension de décalage peut être considérée constante. En réalité, elle dépend de la température du composant, donc peut être amenée à dériver.

Paramètre	Nom	Valeur typique pour un AO classique (LM741)
I_{P1} et I_{P2}	courants de polarisation de l'AO ¹	$I_{P1} = I_{P2} = I_P = 20 \text{ nA}$
Z_e	impédance différentielle d'entrée de l'AO	$Z_e = 2 \text{ M}\Omega$
μ	amplification de l'AO	$\mu = 2 \cdot 10^5$
ϵ_d	tension de décalage en entrée ²	$\epsilon_d = 1 \text{ mV}$
Z_s	impédance de sortie de l'AO	$Z_s = 50 \Omega$

Pour modéliser les défauts de l'AO réel, certains auteurs représentent un AO parfait à l'extérieur duquel apparaissent les défauts (sources de courant, impédances...) (fig. 12).

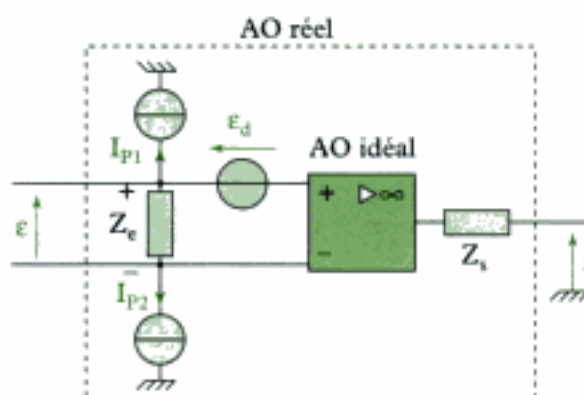


Fig. 12 - Modélisation d'un AO réel.

En régime linéaire, ε n'excède pas 1 mV et Z_e est de l'ordre du $M\Omega$, nous pouvons donc négliger le courant i_d , ce qui revient à Z_e infinie et donc :

$$i_+ \approx I_{P1} \quad \text{et} \quad i_- \approx I_{P2}.$$

En pratique, le fait d'appliquer une réaction négative permet déjà d'éliminer l'influence des impédances d'entrée et de sortie de l'AO.

Modèle dynamique :

Pour tenir compte des défauts dynamiques de l'AO, il y a deux possibilités : soit travailler en régime sinusoïdal en utilisant les complexes (dans ce cas, l'amplification μ est remplacé par la fonction de transfert H de l'AO), soit établir l'équation différentielle de l'AO à partir de sa fonction de transfert.

A.7. Modèle de l'AO idéal

A.7.1 - Définition de l'AO idéal

Définition 4

Un **AO idéal** possède les propriétés suivantes :

- son impédance de sortie est nulle ($Z_s = 0$)
- son impédance d'entrée est infinie (Z_e : infinie)
- ses courants de polarisation sont nuls ($I_{P1} = 0$ et $I_{P2} = 0$)
- sa tension de décalage est nulle ($\varepsilon_d = 0$)
- son amplification est infinie (μ : infinie).

A.7.2 - Conséquence sur les courants d'entrée

Avec le modèle de l'AO réel, nous avons :

$$i_+ = I_{P1} + i_d = I_{P1} + \frac{\varepsilon}{Z_e} \quad \text{et} \quad i_- = I_{P2} - i_d = I_{P2} - \frac{\varepsilon}{Z_e}.$$

Comme Z_e est infinie, $I_{P1} = 0$ et $I_{P2} = 0$, nous avons pour l'AO idéal :

$$i_+ = 0 \quad \text{et} \quad i_- = 0.$$

Propriété 5

Les courants d'entrée d'un **AO idéal** sont considérés **nuls** :

$$i_+ = 0 \quad \text{et} \quad i_- = 0.$$

A.7.3 - Conséquence sur la tension différentielle d'entrée

En régime linéaire, nous avons :

$$s = \mu(\varepsilon - \varepsilon_d) \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{s}{\mu} + \varepsilon_d.$$

Avec le modèle de l'AO idéal, $\varepsilon_d = 0$ et μ est infini, donc :

$$\varepsilon = 0.$$

Propriété 6

Lorsqu'un **AO idéal** fonctionne en régime linéaire, nous avons :

$$\varepsilon = 0, \text{ ce qui revient à dire } e_+ = e_-.$$

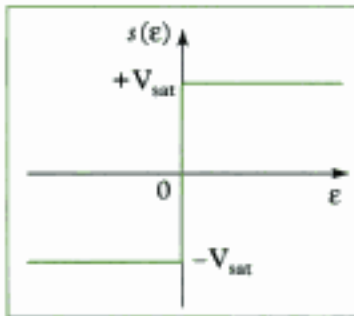


Fig. 13 - Caractéristique de transfert d'un AO idéal.

A.7.4 - Conséquence sur la caractéristique de transfert

Comme $\varepsilon = 0$ dans la zone linéaire, nous pouvons déduire de la figure 4 la caractéristique de transfert de l'AO idéal (fig. 13).

En régime de saturation, nous pouvons remarquer que :

$$s = +V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad s = -V_{\text{sat}} \text{ si } \varepsilon < 0.$$

Propriété 7

En régime de saturation, nous avons :

$$s = \text{signe}(\varepsilon)V_{\text{sat}}$$

A.7.5 - Modèle électrique de l'AO idéal en régime linéaire

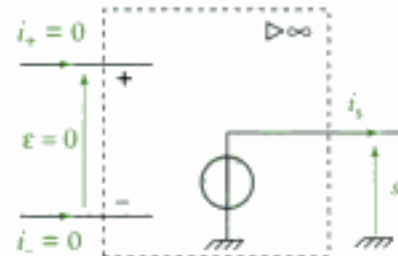


Fig. 14 - Modèle électrique équivalent d'un AO idéal en régime linéaire.

A.8. Prise en compte des défauts de l'AO

En général, il est particulièrement difficile, dans les calculs, de prendre en compte simultanément tous les défauts. Lorsque nous voudrions montrer l'influence de tel ou tel défaut, nous nous baserons toujours sur le modèle de l'AO idéal auquel nous ajouterons ce (ou ces) défauts.

Le principal défaut à ne jamais perdre de vue est la limitation en fréquence de l'AO qui se traduit par une diminution de l'amplification avec la fréquence. Pour prendre en compte ce défaut, il faut écrire :

$$\underline{s} = \underline{H}\underline{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{\text{AO}}}}$$

(modèle de l'AO comme filtre passe-bas du premier ordre).

B. La fonction amplification

B.1. Description de la fonction

La fonction amplification a pour rôle d'augmenter la puissance d'un signal¹. Pour un montage amplificateur, on a :

$$P_s > P_e, \quad \text{avec} \quad P_s = \langle s(t) \cdot i_s(t) \rangle, \quad \text{et} \quad P_e = \langle e(t) \cdot i_e(t) \rangle.$$

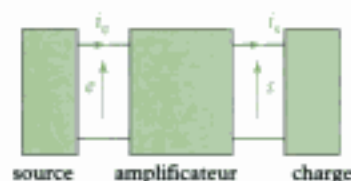
Le complément de puissance est apporté par les circuits d'alimentation (+ V_{CC} et -V_{CC}) de l'AO.

Définition 5

L'amplification en puissance d'un montage amplificateur A_P s'écrit :

$$A_P = \frac{P_s}{P_e}$$

1. Un circuit amplificateur doit s'insérer entre une source de signal et une charge (fig. 15).



Définition 6

Nous associerons à l'amplification en puissance, le **gain en puissance** :

$$G_P = 10 \log (A_P)$$

qui s'exprime en décibels (dB).

Si le montage amplificateur est caractérisé par une relation entre tension de sortie et tension d'entrée, il est appelé *amplificateur de tension*.

Si le montage amplificateur est caractérisé par une relation entre courant de sortie et courant d'entrée, il est appelé *amplificateur de courant*.

Lorsque la relation entre signal de sortie et signal d'entrée est une relation linéaire, l'amplificateur est dit linéaire.

Nous limiterons notre étude, comme le précise le programme, aux montages amplificateurs linéaires à AO, mais il existe cependant d'autres montages possibles. Le montage amplificateur logarithmique, dans lequel la tension de sortie est l'image du logarithme de la tension d'entrée, est un exemple typique d'amplificateur non linéaire.

Pour un **amplificateur linéaire de tension**, nous avons une relation simple entre la tension de sortie s et la tension d'entrée e :

$$s = A e,$$

où A représente l'*amplification en tension* du montage.

Bien entendu, cette dernière relation, avec A constant, n'est valable que dans une bande de fréquence limitée.

Le **gain en tension** G d'un amplificateur linéaire de tension s'exprime par :

$$G = 20 \log (A), \text{ avec } G \text{ en décibels (dB).}$$

Les montages amplificateurs linéaires de tension que nous allons étudier sont basés sur l'AO qui joue le rôle d'élément actif (apport d'énergie au circuit). Ce composant étant, comme nous l'avons rappelé dans la première partie de ce chapitre, limité en fréquence, les amplificateurs que nous allons étudier seront donc eux aussi limités en fréquence.

La limitation en fréquence se traduit pour un signal sinusoïdal par une diminution de l'amplification lorsque la fréquence augmente. Pour un signal non sinusoïdal, la limitation en fréquence peut entraîner une déformation du signal due à une amplification différente selon les harmoniques.

B.2. Montage suiveur

Un montage « **suiveur** » est un amplificateur linéaire de tension à amplification unité (fig. 16).

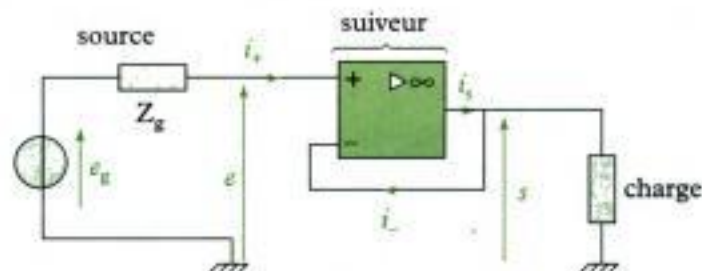


Fig. 16 - Montage suiveur.

B.2.1 - Étude avec l'hypothèse de l'AO idéal

Les tensions appliquées sur les entrées de l'AO s'expriment selon :

$$e_+ = e \quad \text{et} \quad e_- = s.$$

La réaction négative (la tension de sortie est directement appliquée sur l'entrée inverseuse de l'AO) permet à l'AO de fonctionner en régime linéaire de manière stable.

L'AO étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, nous pouvons écrire $e_+ = e_-$ ce qui implique :

$$s = e \quad \text{donc} \quad A = \frac{s}{e} = 1.$$

Cette relation, fondamentale pour étudier les structures comportant cette fonction, masque en réalité l'intérêt d'un tel montage (un fil pourrait effectuer la même fonction).

B.2.2 - Intérêt du montage

• Du point de vue de la source

Quelle que soit la charge, le montage ne prélève en théorie aucun courant sur la source (on a $i_+ = 0$ pour un AO idéal). L'impédance d'entrée de ce montage est en effet théoriquement infinie ($Z_e = \frac{e}{i_+} \rightarrow \infty$).

Même si la source a une impédance Z_g élevée, il n'y a donc pas en théorie de chute de tension à ses bornes. Ce qui se traduit par la relation :

$$e = e_g.$$

• Du point de vue de la charge

La charge recevra une tension $s = e = e_g$, comme si la source était un générateur de tension parfait. L'impédance de sortie de ce montage est en effet théoriquement nulle ($Z_s = 0$ avec l'hypothèse de l'AO parfait).

• Modèle électrique équivalent du montage suiveur (fig. 17)

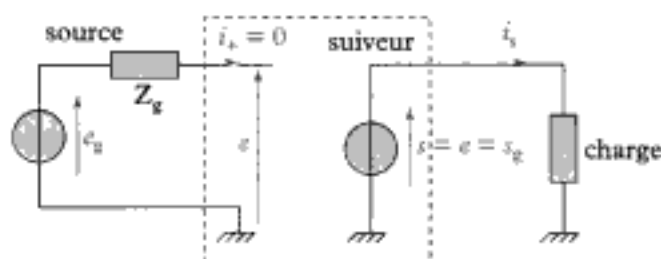


Fig. 17 - Modèle électrique équivalent du montage suiveur obtenu avec l'hypothèse de l'AO parfait.

• Adaptation d'impédance

Ce montage effectue une modification de l'impédance ; la source voit la charge comme s'il s'agissait d'une impédance infinie et la charge voit la source comme s'il s'agissait d'un générateur parfait ayant une impédance nulle.

Nous dirons que ce montage effectue une « adaptation d'impédance ».

B.2.3 - Conséquences des défauts de l'AO

Le but de cette partie est de mettre en évidence l'influence de quelques défauts sur les propriétés du montage.

• Limitation en fréquence de l'AO

La limitation en fréquence de l'AO implique une limitation en fréquence du montage.

Le fonctionnement en régime linéaire de l'AO, nous permet d'écrire pour des signaux sinusoïdaux :

$$\underline{s} = \underline{H(jf)} \underline{e} = \underline{H(jf)}(\underline{e}_+ - \underline{e}_-).$$

Avec $\underline{H(jf)}$ fonction de transfert complexe de l'AO, nous avons vu d'autre part que $\underline{e}_+ = \underline{e}$ et $\underline{e}_- = \underline{s}$, donc :

$$\underline{s} = \underline{H(jf)} (\underline{e} - \underline{s}), \text{ ce qui implique : } \underline{s} = \frac{\underline{H(jf)}}{1 + \underline{H(jf)}} \underline{e}.$$

La fonction de transfert de l'amplificateur $\underline{T(jf)} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ peut donc s'exprimer en fonction de $\underline{H(jf)}$:

$$\underline{T(jf)} = \frac{\underline{H(jf)}}{1 + \underline{H(jf)}}.$$

Nous pouvons remarquer que si $\underline{H(jf)}$ est infinie (hypothèse de l'AO idéal), nous retrouvons le résultat précédent $\underline{T(jf)} = 1 = A$.

En remplaçant $\underline{H(jf)}$ par son expression $\frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}$ (modèle de l'AO comme filtre passe-bas du premier ordre), il vient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}}{1 + \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}} = \frac{\frac{H_0}{1 + H_0}}{1 + j\frac{f}{f_{AO}(1 + H_0)}}.$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre, avec une amplification statique T_0 et une fréquence de coupure f_C :

$$T_0 = \frac{H_0}{1 + H_0} \quad \text{et} \quad f_C = f_{AO}(1 + H_0).$$

Typiquement, $H_0 = \mu = 2 \cdot 10^5$ et $f_{AO} = 8 \text{ Hz}$ pour un AO de type LM741, ce qui implique :

$$T_0 \approx 1 \quad \text{et} \quad f_C \approx f_{AO} H_0 = f_T = 1,6 \text{ MHz}.$$

Le montage suiveur à AO se comporte donc comme un filtre passe-bas du premier ordre d'amplification statique unité et de bande passante $[0 ; f_T]$.

L'amplification du montage ne dépend pas du type d'AO choisi, ce qui n'est pas le cas de la bande passante.

• Courants de polarisation

En pratique, nous avons $i_+ \neq 0$, donc en réalité $e = e_g - Z_g i_+$. En régime linéaire, $i_+ = I_P \approx 20 \text{ nA}$. Si $Z_g = 10 \text{ M}\Omega$, il y a une chute de tension $Z_g I_P \approx 0,2 \text{ V}$ aux bornes de l'impédance.

Il est possible de compenser cette chute de tension par l'ajout d'une résistance R entre l'entrée non inverseuse et la sortie de l'AO (fig. 18) :

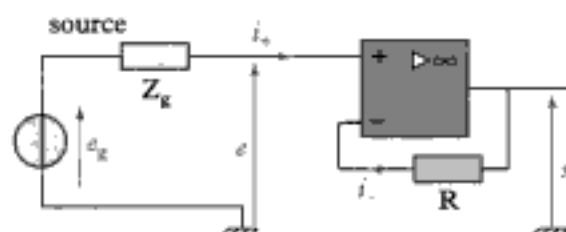


Fig. 18 - Le montage suiveur avec compensation des courants de polarisation.

$$e_+ = e_g - Z_g i_+ \quad \text{et} \quad e_- = s - R i_-.$$

En régime linéaire $e_+ = e_-$ et $i_+ = i_- = I_p$, donc la tension de sortie s'exprime par :

$$s = e_g - (Z_g - R) I_p.$$

Nous aurons donc : $s = e_g$ si $R = Z_g$.

• Limitation du courant de sortie

Le modèle équivalent en sortie du montage suiveur (générateur de tension parfait) n'est valable que pour un fonctionnement « normal » de l'AO.

En pratique $|i_s|$ ne doit pas dépasser $|i_{s\max}| = 25 \text{ mA}$; si cette limite est atteinte, le modèle n'est plus pertinent.

Si la charge est un dipôle passif, $i_{s\max}$ sera obtenue pour :

$$s = s_{\max} = +V_{\text{sat}} = +15 \text{ V}.$$

Ainsi, par exemple, si la charge est constituée d'une résistance R_L , il faut respecter la règle suivante :

$$R_L > \frac{s_{\max}}{i_{s\max}} = \frac{15}{0,025} = 600 \, \Omega.$$

B.3. Amplificateur non-inverseur

Un **amplificateur non-inverseur** est un amplificateur linéaire ayant une amplification positive.

On peut réaliser aisément cette fonction avec un AO (fig. 19).

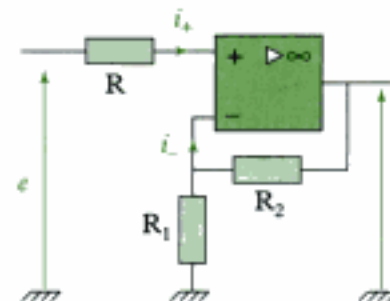


Fig. 19 - Amplificateur non inverseur.

Remarque : Le courant circulant dans la résistance R est en fait le courant d'entrée de la borne non inverseuse de l'AO. Si nous considérons l'AO idéal, $i_+ = 0$, donc la chute de tension dans R est nulle. Cette résistance ne joue donc à première vue aucun rôle, et pourtant elle se rencontre souvent.

En fait, cette résistance permet de compenser la chute de tension provoquée par les courants i_+ et i_- si la condition suivante est respectée (voir exercice 6) :

$$R = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

B.3.1 - Étude avec l'hypothèse d'un AO idéal

En supposant l'AO idéal, nous avons : $i_+ = 0$ et $i_- = 0$. Ce qui implique :

$$e_+ = e \text{ et, en appliquant la formule du diviseur de tension, } e_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s.$$

L'AO comporte une réaction négative (assurée par la résistance R_2), donc pourra fonctionner en régime linéaire de manière stable. Dans ce cas, nous avons $e_+ = e_-$, donc :

$$e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s.$$

Nous pouvons en déduire s en fonction de e :

$$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e.$$

On peut ainsi calculer l'amplification en tension du montage. Précisément :

$$A = \frac{s}{e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Un choix judicieux des résistances R_1 et R_2 permet d'obtenir l'amplification souhaitée. Ce résultat semble indiquer que l'amplification du montage ne dépend pas de la fréquence du signal, mais il a été obtenu avec l'hypothèse d'un AO idéal ayant une amplification infinie.

En réalité, l'amplification d'un AO a pour propriété de diminuer lorsque la fréquence du signal augmente (modèle du filtre passe-bas). À partir d'une certaine fréquence, il devient impossible de considérer l'amplification infinie,

et alors $A < 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

La limitation en fréquence de l'AO a donc pour conséquence une limitation de la bande passante de l'amplificateur.

B.3.2 - Limitation en fréquence du circuit

En tenant compte de la limitation en fréquence de l'AO, son amplification n'est pas infinie pour toute la bande de fréquence, ainsi la relation $e_+ = e_-$ découlant du caractère supposé infini de l'amplification n'est plus vérifiée.

Cependant, le régime linéaire nous permet d'écrire pour un fonctionnement en régime sinusoïdal :

$$\underline{s} = \underline{H(jf)} \underline{e} = \underline{H(jf)} (\underline{e_+} - \underline{e_-}).$$

Nous avons d'autre part :

$$\underline{e_+} = \underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{e_-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \Rightarrow \underline{s} = \underline{H(jf)} \left(\underline{e} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \right)$$

$$\text{d'où :} \quad \underline{s} = \frac{\underline{H(jf)}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{H(jf)}} \underline{e}.$$

La fonction de transfert de l'amplificateur $\underline{T(jf)} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ peut donc s'exprimer selon $\underline{H(jf)}$:

$$\underline{T(jf)} = \frac{\underline{H(jf)}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{H(jf)}}.$$

Remarque : si $\underline{H(jf)}$ est infinie (hypothèse de l'AO idéal), le résultat précédent se retrouve :

$$\underline{T(jf)} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A.$$

En remplaçant $\underline{H}(jf)$ par son expression $\frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}$ (modèle du filtre passe-bas du premier ordre), nous obtenons :

$$\underline{T}(jf) = \frac{\frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}}{1 + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{AO}}}} = \frac{\frac{H_0}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} H_0}}{1 + j \frac{f}{f_{AO} \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} H_0\right)}}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre avec une amplification statique :

$$T_0 = \frac{H_0}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} H_0},$$

et une fréquence de coupure :

$$f_c = f_{AO} \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} H_0\right).$$

B.4. Amplificateur inverseur

Un **amplificateur inverseur** est un amplificateur linéaire ayant une amplification négative.

Cette fonction peut se réaliser aisément avec un AO (fig. 20) :

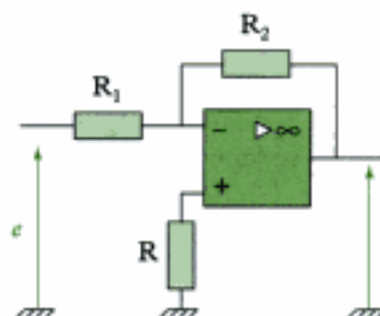


Fig. 20 - Amplificateur inverseur.

La résistance R joue le même rôle que dans le montage précédent, elle sert à compenser la chute de tension due aux courants de polarisation de l'AO. Elle doit pour cela vérifier la relation $R = R_1 // R_2$.

Avec l'hypothèse de l'AO idéal (courants d'entrée nuls : $i_+ = 0$ et $i_- = 0$), nous pouvons exprimer les tensions d'entrées de l'AO :

$$e_+ = 0 \quad \text{et} \quad e_- = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{d'après le théorème de Millman}).$$

La réaction négative (résistance R_2) permet un fonctionnement linéaire stable, ce qui implique :

$$e_- = e_+, \quad \text{donc} \quad \frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} = 0.$$

Nous pouvons en déduire l'expression de la tension de sortie de l'AO :

$$s = -\frac{R_2}{R_1}e.$$

L'amplification en tension s'écrit donc : $A = \frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1}$.

Comme l'indiquait le nom de ce montage, l'amplification est ici négative.

De la même manière que pour les montages précédents, cette relation n'est valable que dans une bande de fréquences limitée dépendant de la bande passante de l'AO.

Pour la détermination de la bande passante de ce montage, il ne faut pas considérer l'AO idéal, mais tenir compte de sa limitation en fréquence en utilisant le modèle de l'AO comme filtre passe-bas du premier ordre (voir exercice 13).

C. La fonction addition

C.1. Description de la fonction

La **fonction addition** élabore le signal de sortie s en effectuant une somme pondérée ou non de plusieurs signaux d'entrée e_1, e_2, \dots, e_n :

$$s = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \dots + a_n \cdot e_n.$$

Les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n peuvent être positifs ou négatifs.

Remarques :

- Un montage réalisant la fonction addition est qualifié de « sommateur ».
- Dans le cas de deux signaux e_1 et e_2 avec $a_2 = -a_1 = -A$, nous pouvons écrire :

$$s = A(e_1 - e_2).$$

Nous parlons alors plutôt dans ce cas de « fonction soustraction » ou d'« amplificateur différentiel ».

C.2. Sommateur inverseur

Tous les coefficients a_i sont négatifs (fig. 21).

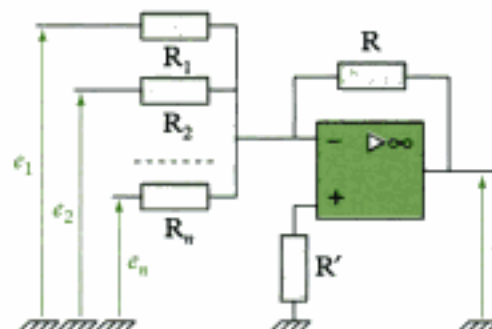


Fig. 21 - Montage sommateur inverseur.

Avec l'hypothèse de l'AO idéal, nous pouvons exprimer les tensions d'entrées de l'AO :

$$e_+ = 0 \quad \text{et} \quad e_- = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \dots + \frac{e_n}{R_n} + \frac{s}{R}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} + \frac{1}{R}} \quad \text{d'après le théorème de Millman.}$$

La réaction négative (résistance R) permet un fonctionnement linéaire stable, ce implique $e_+ = e_- = 0$ donc :

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \dots + \frac{e_n}{R_n} + \frac{s}{R} = 0.$$

Nous pouvons en déduire l'expression de la tension de sortie s :

$$s = -\left(\frac{R}{R_1}e_1 + \frac{R}{R_2}e_2 + \dots + \frac{R}{R_n}e_n\right).$$

Par identification avec la relation définissant la fonction addition, les coefficients s'expriment par :

$$a_1 = -\frac{R}{R_1}, \quad a_2 = -\frac{R}{R_2}, \quad \dots, \quad a_n = -\frac{R}{R_n}.$$

Un choix judicieux des résistances permet d'obtenir les coefficients de pondération souhaités.

C.3. Sommateur non-inverseur

Tous les coefficients a_i seront positifs (fig. 22).

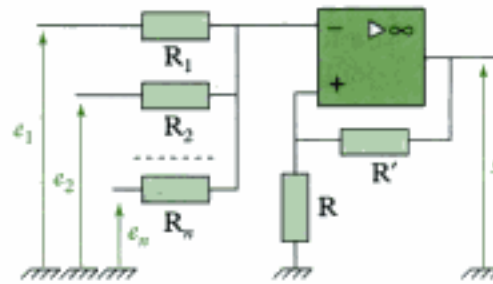


Fig. 22 - Montage sommateur non inverseur.

Avec l'hypothèse de l'AO idéal, nous pouvons exprimer simplement les tensions d'entrées de l'AO :

$$e_- = \frac{R}{R + R'} s \text{ d'après la formule du diviseur de tension,}$$

et :

$$e_+ = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \dots + \frac{e_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}} \text{ d'après le théorème de Millman.}$$

La réaction négative permet un fonctionnement linéaire stable ; dans le cas d'un AO supposé idéal, la relation $e_- = e_+$ est donc vérifiée, ce qui implique :

$$\frac{R}{R + R'} s = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \dots + \frac{e_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}.$$

Nous pouvons ainsi en déduire la tension de sortie s :

$$s = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \dots + \frac{e_n}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}.$$

Dans le cas où nous avons $R_1 = R_2 = \dots = R_n$, il est possible de simplifier l'expression de s :

$$s = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_n}{n}.$$

La simple somme des signaux e_1 à e_n avec coefficients de pondération unité sera obtenue lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$R' = R(n-1).$$

Dans ce cas :

$$s = e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

D. La fonction soustraction

D.1. Description de la fonction

Dans la fonction soustraction, la tension de sortie s est proportionnelle à la différence de deux tensions v_A et v_B (fig. 23) :

$$s = A(v_A - v_B).$$

Les tensions v_A et v_B sont référencées par rapport à un potentiel commun qui est en général la masse. $v_A - v_B$ représente donc une différence de potentiel que l'on peut noter u_{AB} . Nous aurons ainsi :

$$s = A \cdot u_{AB}.$$

s et u_{AB} étant deux tensions, nous obtenons la même relation que pour un amplificateur linéaire à ceci près que u_{AB} n'est pas référencée par rapport à la masse. Un montage réalisant la fonction soustraction peut donc être aussi qualifié d'amplificateur différentiel linéaire.

Le coefficient A est alors appelé amplification différentielle (en tension).

D.2. Montage à un AO

Dans le cas de l'AO idéal (fig. 24), les courants d'entrée sont nuls, donc :

$$\bullet e_+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_A \text{ d'après la formule du diviseur de tension ;}$$

$$\bullet e_- = \frac{\frac{s}{R_2} + \frac{v_B}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 s + R_2 v_B}{R_1 + R_2} \text{ par application du théorème de Millman.}$$

Le fonctionnement linéaire permis par la réaction négative assurée par R_2 implique :

$$e_- = e_+ \Rightarrow \frac{R_1 s + R_2 v_B}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_A.$$

Nous pouvons en déduire l'expression de s :

$$s = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} v_A - \frac{R_2}{R_1} v_B.$$

Pour réaliser un amplificateur différentiel, les coefficients de v_A et v_B doivent être identiques, donc :

$$\frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} = \frac{R_2}{R_1} \Leftrightarrow R_1 R_4 = R_2 R_3.$$

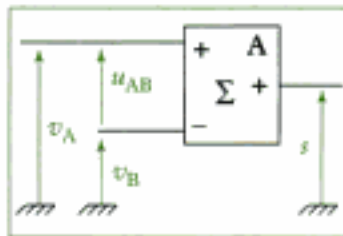


Fig. 23 - Symbole de la fonction soustraction.

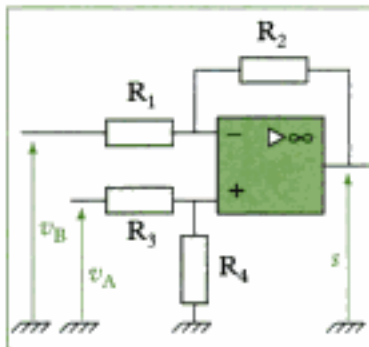


Fig. 24 - Montage amplificateur différentiel à un AO.

Si cette condition est vérifiée, nous avons :

$$s = \frac{R_2}{R_1}(v_A - v_B) = \frac{R_2}{R_1}u_{AB}$$

L'amplification différentielle vaut ici : $A = \frac{s}{u_{AB}} = \frac{R_2}{R_1}$.

E. La fonction dérivation

E.1. Description de la fonction

Dans un circuit « dérivateur », la tension de sortie est l'image à un coefficient multiplicateur (réel) près de la dérivée par rapport au temps du signal d'entrée.

$$s = \pm \tau \frac{de}{dt}$$

Le coefficient τ est homogène à un temps. Avec un signe « - », le montage est dit inverseur.

E.2. Montage dérivateur à AO

E.2.1 - Étude avec l'hypothèse de l'AO idéal

Nous constatons que la résistance R (fig. 25) assure la réaction négative qui permet à l'AO de fonctionner en régime linéaire. Dans ce cas, si nous le considérons idéal :

$$e_- = e_+ = 0.$$

Nous avons ainsi :

$$u_C = e, \text{ donc : } i_C = C \frac{de}{dt} \text{ et } i_R = \frac{s}{R}.$$

La loi des nœuds donne d'autre part : $i_C + i_R = i_- = 0$ dans le cas de l'AO idéal, donc :

$$C \frac{de}{dt} + \frac{s}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow s = -RC \frac{de}{dt} = -\tau \frac{de}{dt} \text{ en posant } \tau = RC.$$

L'application du modèle de l'amplificateur opérationnel parfait a permis de montrer que $s(t)$ est l'image, à un coefficient $-\tau$ près, de $\frac{de}{dt}$.

• Fonction de transfert du dérivateur

En régime sinusoïdal avec la notation complexe, l'opération de dérivation revient à multiplier le nombre complexe associé par $j\omega$, l'équation $s = -\tau \frac{de}{dt}$ se réécrit $\underline{s} = -j\tau\omega \underline{e}$, donc :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -j\tau\omega \text{ avec } \tau = RC$$

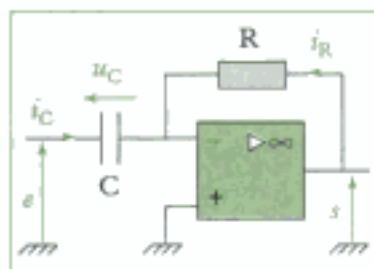


Fig. 25 - Montage dérivateur.

Ce qui nous donne : $|T(j\omega)| = \tau\omega$ et $\varphi = \text{Arg}\{T(j\omega)\} = -90^\circ$.

Le diagramme de Bode pour le gain du montage $G = 20\log |T(j\omega)|$ est donc (fig. 26) :

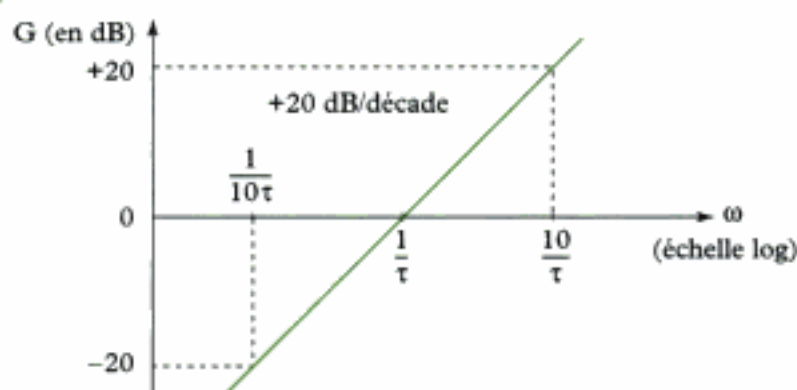


Fig. 26 - Diagramme de Bode d'un dérivateur.

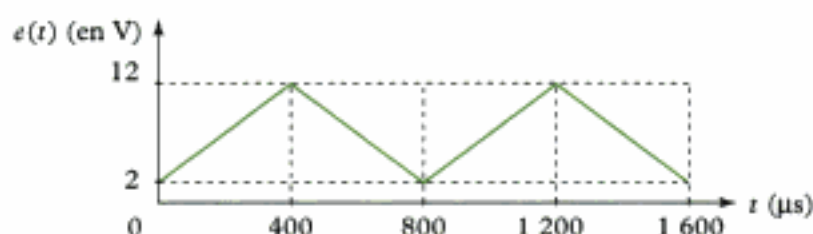
Il apparaît que le gain tend vers l'infini lorsque la fréquence tend vers l'infini. Ceci démontre le caractère irréaliste et irréalisable d'une telle fonction.

Ce résultat a été obtenu en supposant l'AO idéal, c'est-à-dire avec une amplification infinie et une bande passante infinie. En pratique, l'amplification de l'AO est très élevée mais finie, et sa bande passante est limitée.

Nous verrons au paragraphe E.2.3 que ce résultat n'est en fait qu'une approximation de la fonction réellement effectuée.

Application 1 Recherche de la forme du signal de sortie pour un circuit dérivateur

Considérons le signal d'entrée $e(t)$ suivant :



Représenter le signal $s(t)$ avec $R = 10\text{ k}\Omega$ et $C = 10\text{ nF}$.

Solution

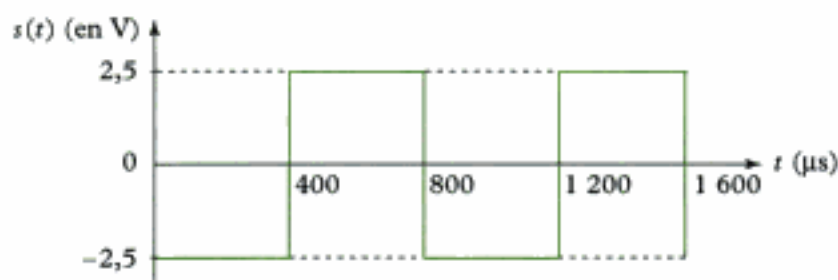
De $t = 0$ à $t = 400\text{ }\mu\text{s}$, la courbe de $e(t)$ est une droite :

$$\frac{de}{dt} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{10}{400 \cdot 10^{-6}} = 25\,000\text{ V/s, donc : } s(t) = -RC \frac{de}{dt} = -2,5\text{ V.}$$

De même, de $t = 400\text{ }\mu\text{s}$ à $t = 800\text{ }\mu\text{s}$:

$$s(t) = -RC \frac{de}{dt} = 2,5\text{ V.}$$

Ce qui nous donne la courbe théorique suivante pour $s(t)$:



E.2.2 - Étude expérimentale du montage dérivateur

Nous avons effectué l'expérience avec un AO de type LM741 pour vérifier la validité du résultat théorique obtenu dans l'application du paragraphe précédent (fig. 27) :

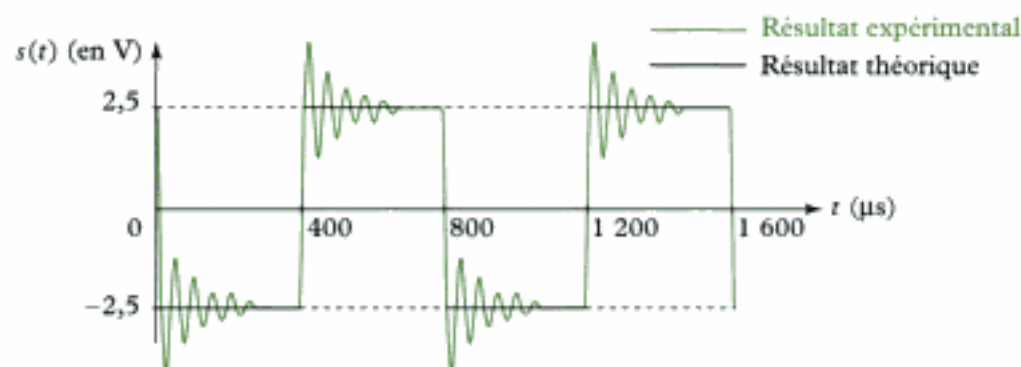


Fig. 27 - Réponse du circuit dérivateur.

• Observations expérimentales

Après chaque transition (basculement du signal de 2,5 V vers -2,5 V et inversement), le signal expérimental présente les particularités suivantes :

- il y a des oscillations parasites,
- l'amplitude des oscillations décroît exponentiellement au cours du temps,
- au bout d'une durée approximative de 300 μs, la réponse expérimentale coïncide avec la réponse théorique.

• Interprétations

Ce circuit est proche de l'instabilité, la réponse après chaque transition peut être qualifiée de pseudo-périodique. La fonction de transfert réelle de ce circuit est donc au moins du second ordre, ce qui ne correspond pas à celle que nous avons obtenue avec l'hypothèse de l'AO idéal :

$$\underline{T} = -j\tau\omega.$$

• Conclusions

L'écart que l'on peut observer entre la réponse théorique et la réponse réelle est dû au fait que nous avons considéré l'AO idéal (amplification toujours infinie) alors qu'il se comporte comme un filtre passe bas du premier ordre.

E.2.3 - Fonction de transfert réelle

En réalité, l'hypothèse d'une amplification que l'on peut toujours supposer infinie ne se vérifie plus dans notre exemple. Nous n'avons donc plus le droit d'écrire la relation $e_+ = e_-$ découlant de cette propriété.

Cependant, pour un signal d'entrée sinusoïdal, l'AO étant en régime linéaire, nous pouvons écrire :

$$\underline{s} = \underline{H}(j\omega)\underline{\varepsilon} = \underline{H}(j\omega)(\underline{e}_+ - \underline{e}_-) \text{ avec } \underline{H}(j\omega) \text{ fonction de transfert de l'AO ;}$$

$$\underline{e}_+ = 0 \text{ et } \underline{e}_- = \frac{jC\omega \underline{e} + \frac{\underline{s}}{R}}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{jRC\omega \underline{e} + \underline{s}}{1 + jRC\omega} \text{ d'après le théorème de Millman.}$$

$$\text{Donc : } \underline{s} = -\underline{H}(j\omega) \frac{jRC\omega \underline{e} + \underline{s}}{1 + jRC\omega}.$$

Nous en déduisons l'expression du signal de sortie \underline{s} en fonction du signal d'entrée \underline{e} :

$$\underline{s} = \frac{-\underline{H}(j\omega)jRC\omega}{1 + \underline{H}(j\omega) + jRC\omega} \underline{e}.$$

En remplaçant $\underline{H}(j\omega)$ par son expression $\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{AO}}}$ (modèle du filtre passe-bas du premier ordre), il vient :

$$\underline{s} = \frac{-\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{AO}}}jRC\omega}{1 + \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{AO}}} + jRC\omega} = \frac{-\frac{H_0}{1 + H_0}jRC\omega}{1 + j\frac{1 + RC\omega_{AO}}{\omega_{AO}(1 + H_0)}\omega + j^2\frac{RC}{\omega_{AO}(1 + H_0)}\omega^2}.$$

Nous reconnaissons ici la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre.

En utilisant les paramètres d'un AO de type LM 741 donné précédemment, et avec $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$, représentons la courbe de gain du dérivateur réel, du dérivateur parfait et de l'AO (fig. 28) :

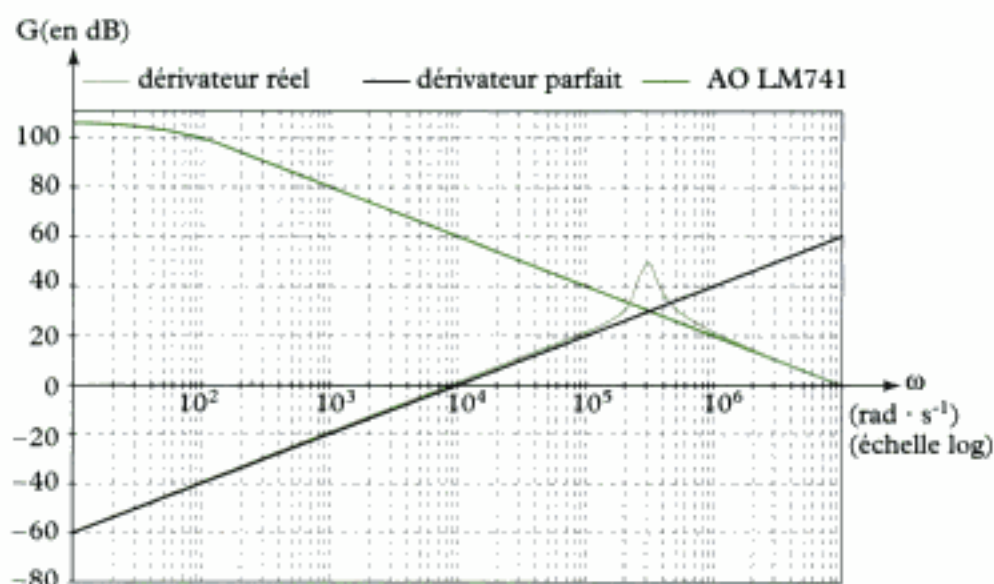


Fig. 28 - Réponse réelle du dérivateur en fonction de la pulsation.

Nous observons sur ce diagramme que la courbe de gain du dérivateur réel se confond avec celle du dérivateur parfait jusqu'à la pulsation $\omega = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (ce qui correspond à la fréquence de 16 kHz).

Pour $\omega = 3 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ($f = \frac{\omega}{2\pi} = 48 \text{ kHz}$), un phénomène de résonance¹ apparaît ; au-delà de cette pulsation, le gain du dérivateur réel décroît avec la fréquence contrairement au dérivateur parfait.

Le dérivateur à AO se comporte en réalité comme un filtre passe-bande du second ordre. Il ne présente un caractère dérivateur que pour une bande de fréquences limitée.

¹ Ce type de réponse est celle d'un filtre passe-bande pour

lequel $m = \frac{1}{2Q} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le phénomène de résonance peut entraîner l'apparition d'oscillations parasites dans la réponse du circuit ; cet inconvénient peut être évité en utilisant un montage pseudo-dérivateur.

E.3. Montage pseudo-dérivateur à AO

Le montage pseudo-dérivateur est volontairement limité en fréquence par l'ajout d'une résistance R' en série avec le condensateur C (fig. 29) de manière à éviter les oscillations parasites.

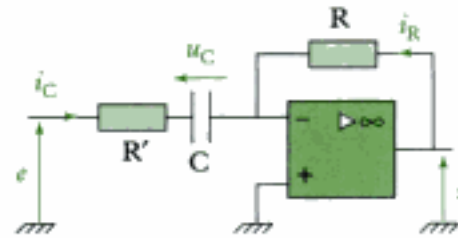


Fig. 29 - Montage pseudo-dérivateur.

Supposons l'AO idéal. Le régime linéaire implique $e_- = e_+ = 0$, d'où :

$$e - R' i_C - u_C = 0 \quad \text{et} \quad i_R = \frac{s}{R}.$$

Dérivons cette équation pour éliminer u_C :

$$\frac{de}{dt} - R' \frac{di_C}{dt} - \frac{du_C}{dt} = 0.$$

Comme nous avons $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, il vient :

$$\frac{de}{dt} - R' \frac{di_C}{dt} - \frac{i_C}{C} = 0.$$

Par ailleurs :

$$i_R + i_C = 0, \text{ ce qui implique } i_C = -i_R = -\frac{s}{R}.$$

Nous pouvons en déduire l'équation différentielle liant le signal de sortie $s(t)$ au signal d'entrée $e(t)$:

$$\frac{de}{dt} + \frac{R'}{R} \frac{ds}{dt} + \frac{s}{RC} = 0 \Leftrightarrow s(t) + R'C \frac{ds}{dt} = -RC \frac{de}{dt}$$

Nous constatons ici que si la condition $R'C \frac{ds}{dt} \ll s(t)$ est vérifiée, nous avons

$s(t) = -RC \frac{de}{dt}$, ce qui correspond alors à l'équation d'un circuit dérivateur.

• Fonction de transfert en régime sinusoïdal

L'équation $s(t) + R'C \frac{ds}{dt} = -RC \frac{de}{dt}$ devient avec la notation complexe :

$$\underline{s} + jR'C\omega \underline{s} = -jRC\omega \underline{e}$$

donc :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-jRC\omega}{1 + jR'C\omega}$$

- Pour ω tendant vers 0, nous avons :

$$\underline{T}(j\omega) = -jRC\omega$$

car $R'C\omega \ll 1$; la fonction de transfert est donc semblable à celle du dérivateur idéal.

- Pour ω tendant vers l'infini :

$$\underline{T}(j\omega) = -\frac{R}{R'}$$

Le **montage pseudo-dérivateur** est un filtre passe-haut du premier ordre. Il se comporte comme un dérivateur dans une bande de fréquences restreinte.

F. La fonction intégration

F.1. Description de la fonction

Un montage réalisant la fonction intégration effectuée sur un signal d'entrée $e(t)$ l'opération suivante :

$$s(t) = s(t_0) \pm \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t e(t') dt'$$

$s(t_0)$ représente la valeur initiale de $s(t)$; elle dépendra de la charge emmagasinée initialement dans le (ou les) condensateur(s).

En dérivant l'expression précédente par rapport au temps, il est également possible de caractériser la fonction par la relation suivante :

$$\frac{ds}{dt} = \pm \frac{1}{\tau} e(t).$$

Remarque : avec un signe $-$, nous dirons que le montage est inverseur.

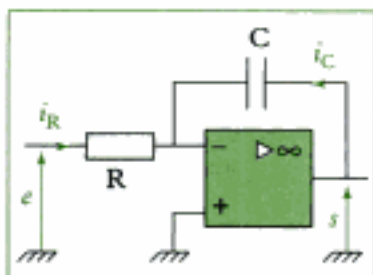


Fig. 30 - Montage intégrateur.

F.2. Intégrateur à AO

L'AO supposé idéal comporte une réaction négative (condensateur C (fig. 30)), donc il fonctionne en régime linéaire, ce qui implique :

$$e_- = e_+ = 0.$$

On en déduit :

$$i_R = \frac{e}{R} \quad \text{et} \quad i_C = C \frac{ds}{dt}$$

$$\text{L'AO étant idéal, } i_R + i_C = 0 \Rightarrow \frac{e}{R} + C \frac{ds}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = -\frac{e}{\tau} \quad \text{en posant } \tau = RC.$$

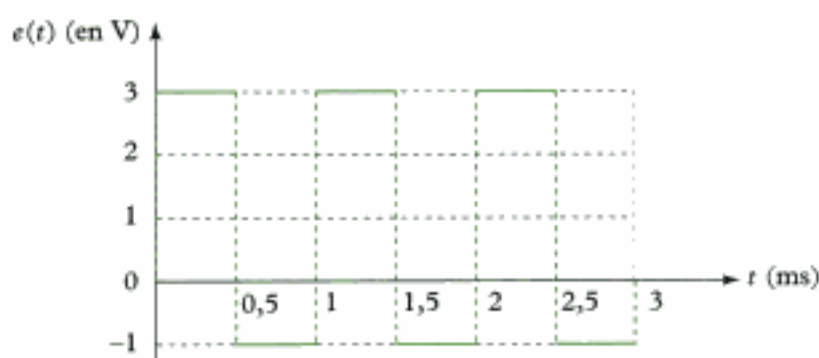
Le signal de sortie est donc une primitive de $-\frac{e}{\tau}$.

En intégrant l'équation précédente entre deux instants quelconques t_0 et t tels que $t > t_0$, nous obtenons :

$$\int_{t_0}^t \frac{ds}{dt'} dt' = - \int_{t_0}^t \frac{e}{\tau} dt' \Rightarrow s(t) = s(t_0) - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t e(t') dt'.$$

Application 2 Recherche de la forme du signal de sortie pour un circuit intégrateur

Considérons le signal d'entrée $e(t)$ suivant :



Représenter le signal $s(t)$ avec $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 100 \text{ nF}$ si on considère le condensateur C initialement déchargé. Au bout de combien de temps l'AO va-t-il se saturer ?

Solution

- De $t = 0$ à $t = 0,5 \text{ ms}$, $e(t) = 3 \text{ V}$ donc :

$$s(t) = s(0) - \frac{1}{\tau} \int_0^t e(t') dt' = -\frac{1}{10^{-3}} \int_0^t 3 dt' = 3 \cdot 10^3 t$$

car initialement C est déchargé, donc $s(0) = 0$.

Pour $t = 0,5 \text{ ms}$, $s(0,5 \text{ ms}) = -1,5 \text{ V}$.

- De $t = 0,5 \text{ ms}$ à $t = 1 \text{ ms}$, $e(t) = -1 \text{ V}$ donc :

$$s(t) = s(0,5 \text{ ms}) - \frac{1}{\tau} \int_{0,5 \text{ ms}}^t e(t') dt' = -1,5 + 10^3(t - 0,5 \cdot 10^{-3}).$$

Pour $t = 1 \text{ ms}$, $s(1 \text{ ms}) = -1,5 + 0,5 = -1 \text{ V}$.

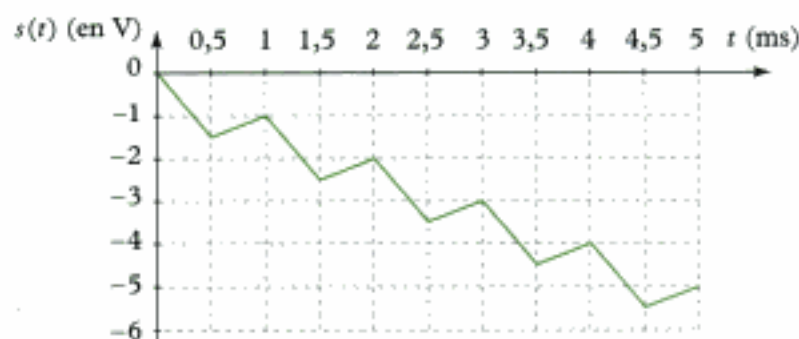
- De $t = 1 \text{ ms}$ à $t = 1,5 \text{ ms}$, $e(t) = 3 \text{ V}$ donc :

$$s(t) = s(1 \text{ ms}) - \frac{1}{\tau} \int_{1 \text{ ms}}^t e(t') dt' = -1 - 3 \cdot 10^3(t - 1 \cdot 10^{-3}).$$

Pour $t = 1,5 \text{ ms}$, $s(1,5 \text{ ms}) = -1 - 1,5 = -2,5 \text{ V}$.

Et ainsi de suite...

Ce qui donne la courbe suivante pour $s(t)$:



Pour $t = 14 \text{ ms}$, nous aurons $s(14 \text{ ms}) = -14 \text{ V}$ donc, en extrapolant, l'AO sera saturé pour :

$$t = 14,33 \text{ ms}$$

car la tension $s(t)$ atteindra la valeur -15 V .

• Conclusion et inconvénient du montage intégrateur

Nous avons pu voir dans l'exemple précédent qu'un signal comportant une composante continue appliquée à l'intégrateur entraîne la saturation de l'AO. Même si la composante continue est de très faible amplitude (quelques μV), l'AO finit par se saturer. Un circuit intégrateur ne peut donc fonctionner sans dispositif de réinitialisation permettant d'éviter la saturation.

Une des solutions est de remplacer le montage intégrateur par un autre circuit dit « pseudo-intégrateur » dont l'amplification est volontairement limitée pour les basses fréquences (voir le paragraphe suivant).

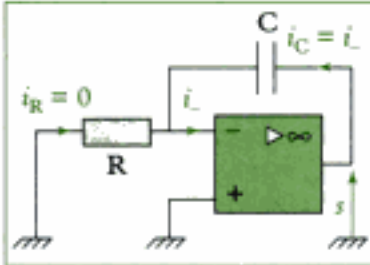


Fig. 31 - Défaut du montage intégrateur.

Le risque de saturation de l'AO est même présent si l'entrée est reliée à la masse, et ceci, à cause des défauts de l'AO et en particulier du courant de polarisation de l'entrée inverseuse qui va charger le condensateur C (fig. 31).

Dans le montage pseudo-intégrateur, une résistance sera placée en parallèle sur la capacité C pour éviter qu'elle ne soit chargée par le courant d'entrée i_- .

• Fonction de transfert en régime sinusoïdal

L'équation $\frac{ds}{dt} = -\frac{e}{\tau}$ se traduit en notation complexe par :

$$j\omega s = -\frac{e}{\tau},$$

donc la fonction de transfert du montage intégrateur s'écrit :

$$\underline{T} = \frac{s}{e} = -\frac{1}{j\tau\omega}$$

ce qui donne : $|\underline{T}(j\omega)| = \frac{1}{\tau\omega}$ et $\varphi = \text{Arg}\{\underline{T}(j\omega)\} = 90^\circ$.

Le diagramme de Bode pour le gain du montage $G = 20\log |\underline{T}(j\omega)|$ a donc l'allure suivante (fig. 32) :

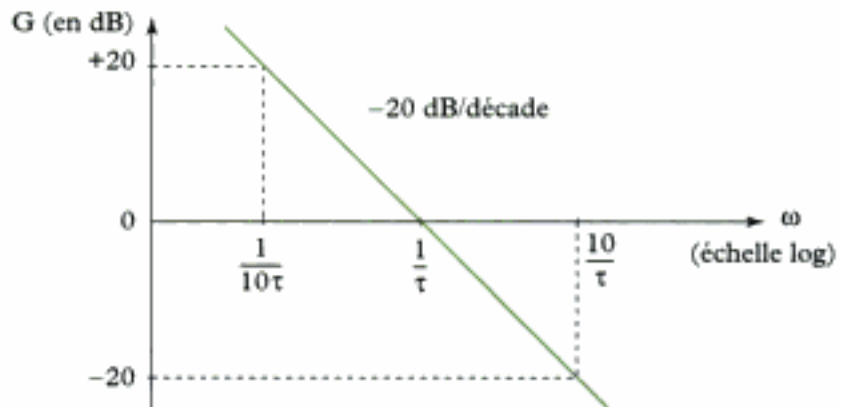


Fig. 32 - Diagramme de Bode d'un intégrateur.

Le gain tend donc vers l'infini lorsque la fréquence tend vers 0. Ceci justifie le fait qu'il ne faut jamais appliquer un signal continu à l'entrée d'un montage intégrateur au risque de le saturer.

F.3. Pseudo-intégrateur à AO

En boucle ouverte, un intégrateur finit toujours par se saturer du fait :

- des défauts de l'AO,
- de la présence inévitable d'une composante continue en entrée même si sa valeur est très faible.

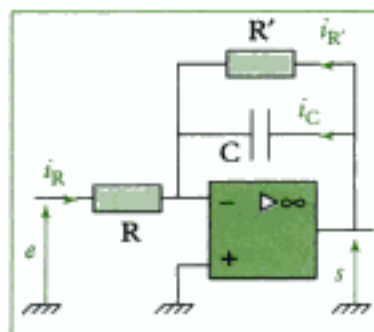


Fig. 33 - Montage pseudo-intégrateur.

Pour cette raison il faut utiliser un montage pseudo-intégrateur (fig. 33).

L'AO, ici supposé idéal, possède une réaction négative donc fonctionne en régime linéaire, donc $e_- = e_+ = 0$, ce qui implique :

$$i_R = \frac{e}{R}, \quad i_{R'} = \frac{s}{R'} \quad \text{et} \quad i_C = C \frac{ds}{dt}$$

D'où :

$$i_R + i_C + i_{R'} = 0 \quad (\text{AO idéal}) \Rightarrow \frac{e}{R} + C \frac{ds}{dt} + \frac{s}{R'} = 0.$$

La tension de sortie s s'exprime donc par une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{R'C} = -\frac{e}{RC}.$$

Si la constante de temps $\tau' = R'C$ est suffisamment élevée, $\frac{s}{R'C} \ll \frac{ds}{dt}$, alors $\frac{ds}{dt} = -\frac{e}{RC}$; le montage fonctionne en intégrateur.

Par exemple, dans le cas d'une tension d'entrée continue $e(t) = E_0$, la tension s va croître en valeur absolue et tendre exponentiellement vers $-\frac{R'}{R}E_0$ car $\frac{ds}{dt}$ va tendre vers 0 : la tension de sortie ne tend pas systématiquement vers la tension de saturation (tant que $\frac{R'}{R}|E_0| < V_{\text{sat}}$).

G. Circuit déphaseur

G.1. Description de la fonction

Un circuit déphaseur a pour fonction de fournir, à partir d'un signal sinusoïdal d'entrée, un autre signal sinusoïdal de même fréquence mais déphasé d'un angle donné φ par rapport au signal d'origine (fig. 34) :

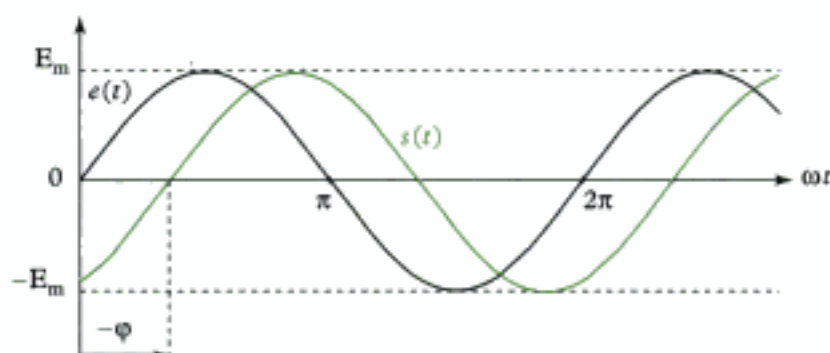


Fig. 34 - Signaux d'entrée et de sortie d'un circuit déphaseur.

Il est préférable qu'un circuit déphaseur ne modifie pas l'amplitude du signal ; pour cette raison, on évite d'avoir recours à un simple circuit de filtrage.

G.2. Circuit déphaseur à AO

Ce circuit (fig. 35) ayant pour fonction de déphaser le signal sinusoïdal $e(t)$, nous choisissons de faire son étude en régime sinusoïdal avec la notation complexe.

Il est également possible d'établir l'équation différentielle de ce circuit, mais cela présente peu d'intérêt.

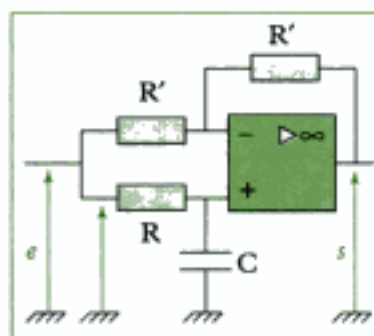


Fig. 35 - Circuit déphaseur à AO.

En supposant l'AO idéal :

$$\underline{e}_+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e} \quad (\text{diviseur de tension})$$

$$\underline{e}_- = \frac{\frac{\underline{e}}{R'} + \frac{\underline{s}}{R'}}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'}} = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} \quad (\text{théorème de Millman}).$$

L'AO fonctionne en régime linéaire donc $\underline{e}_- = \underline{e}_+$, ce qui implique :

$$\frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega} \Leftrightarrow (1 + jRC\omega)(\underline{e} + \underline{s}) = 2\underline{e}.$$

On peut en déduire l'expression du signal de sortie \underline{s} :

$$\underline{s} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e} \Leftrightarrow \underline{T} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Donc :

$$|\underline{T}| = 1 \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arg}\{\underline{T}\} = -2\text{Arctan}(RC\omega)$$

$|\underline{T}| = 1$, donc le déphaseur ne modifie pas l'amplitude du signal, et ceci, quelle que soit sa pulsation ω ; il est également appelé « filtre passe-tout ».

La figure 36 est le graphique donnant φ en fonction de $RC\omega$:

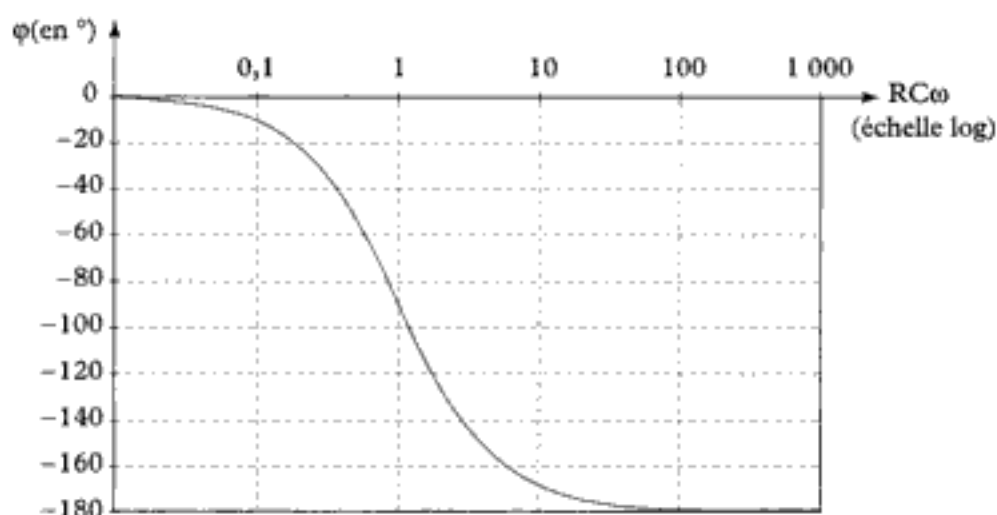
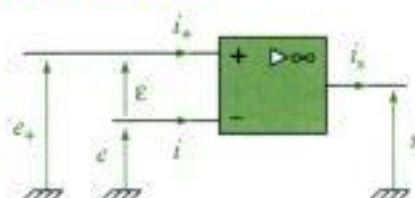


Fig. 36 - Déphasage φ en fonction de $RC\omega$.

Remarque : la phase ne varie pas linéairement avec ω (sauf au voisinage de $\omega = \frac{1}{RC}$) ; on parle de distorsion de phase.

L'essentiel

✓ Propriétés essentielles de l'AO idéal



- Pour un AO supposé idéal, les courants d'entrée i_+ et i_- sont nuls :

$$i_+ = 0 \quad \text{et} \quad i_- = 0.$$

- En **régime linéaire**, si l'AO est supposé parfait, la tension différentielle d'entrée ε est nulle :

$$\varepsilon = 0, \quad \text{donc :} \quad e_+ = e_-.$$

Pour permettre un fonctionnement en régime linéaire, l'AO doit comporter une réaction négative (assurée par une liaison entre la sortie de l'AO et l'entrée inverseuse).

- En **régime de saturation**, la tension de sortie ne peut valoir que deux valeurs possibles :

$$\begin{cases} s = +V_{\text{sat}} = +15 \text{ V} & \text{si } \varepsilon > 0 \Leftrightarrow e_+ > e_- \\ s = -V_{\text{sat}} = -15 \text{ V} & \text{si } \varepsilon < 0 \Leftrightarrow e_+ < e_- \end{cases}$$

✓ Limitation en fréquence de l'AO

L'AO étant limité en fréquence, il est modélisé comme un **filtre passe-bas du premier ordre**.

En régime linéaire, nous avons :

$$s = H \varepsilon = H(e_+ - e_-)$$

H représente la fonction de transfert de l'AO ; elle s'exprime en fonction de la fréquence f :

$$H(jf) = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{\text{AO}}}},$$

où H_0 est l'amplification statique de l'AO et f_{AO} sa fréquence de coupure.

✓ La fonction amplification linéaire de tension

La tension de sortie s (en volts) est proportionnelle à la tension d'entrée ε (en volts) :

$$s = A \varepsilon ; \quad G = 20 \log |A|.$$

A représente l'amplification en tension (coefficient sans unité) et G le gain en tension exprimé en dB.

✓ La fonction soustraction

$$s = A(v_A - v_B) = A u_{\text{AB}}.$$

A représente l'amplification différentielle (coefficient sans unité) et u_{AB} la tension différentielle d'entrée (en volts).

✓ La fonction dérivation

Le signal de sortie est l'image de la dérivée par rapport au temps du signal d'entrée :

$$s(t) = \pm \tau \frac{de}{dt}.$$

✓ La fonction intégration

Le signal de sortie est une primitive du signal d'entrée :

$$s(t) = s(t_0) \pm \int_{t_0}^t e(t') dt' \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = \pm \frac{1}{\tau} e(t).$$

✓ La fonction déphasage

Un signal d'entrée sinusoïdal est déphasé d'un angle φ sans modification d'amplitude.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment étudier un montage linéaire dans lequel l'AO est supposé idéal ?

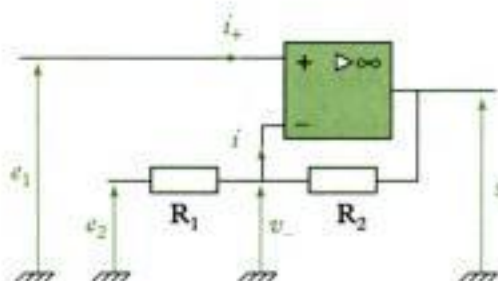
On se propose de donner une méthode générale permettant d'exprimer le signal de sortie d'une fonction réalisée à l'aide d'un AO supposé idéal en fonction des signaux d'entrée.

→ Savoir faire

- ❶ Exprimer les tensions d'entrée de l'AO e_+ et e_- en considérant les courants d'entrée nuls.
- ❷ Écrire la relation $e_+ = e_-$ résultant du fait que l'AO fonctionne en régime linéaire et qu'il est idéal.
- ❸ Résoudre l'expression précédente pour exprimer la tension de sortie de l'AO.

→ Application

Dans le montage suivant, exprimer la tension de sortie s en fonction des tensions d'entrée e_1 et e_2 si l'AO est supposé idéal.



Solution

- ❶ En supposant l'AO idéal, nous pouvons dire que ses courants d'entrée sont nuls ($i_+ = 0$ et $i_- = 0$).

Exprimons tout d'abord la tension appliquée sur l'entrée non inverseuse :

$$e_+ = e.$$

La tension appliquée sur l'entrée inverseuse est notée e_- ; elle dépend de deux autres tensions, s et e_2 ; nous pouvons l'exprimer en utilisant le théorème de Millman :

$$e_- = \frac{\frac{e_2}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

- ② L'AO comporte une réaction négative (résistance R_2), donc fonctionne en régime linéaire, ce qui implique $e_- = e_+$ car l'AO est considéré idéal. D'où :

$$\frac{\frac{e_2}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = e_1 \quad (1)$$

- ③ Nous pouvons déduire de cette équation la tension de sortie s :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{e_2}{R_1} + \frac{s}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) e_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) e_1 - \frac{e_2}{R_1}$$

$$\Leftrightarrow s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e_1 - \frac{R_2}{R_1} e_2$$

Méthode n° 2

Comment étudier la réponse en fréquence d'un montage linéaire à AO ?

On se propose de donner une méthode générale permettant de déterminer la réponse en fréquence en régime sinusoïdal d'un montage linéaire à AO lorsque celui-ci est supposé réel.

→ Savoir faire

① Tous les éléments étant linéaires, nous pouvons utiliser la notation complexe. Exprimer les tensions d'entrée de l'AO e_+ et e_- en considérant les courants d'entrée nuls.

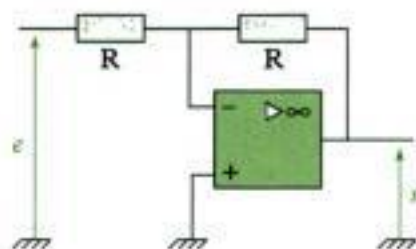
② Exprimer la tension de sortie de l'AO en utilisant la relation $s = H e = H(e_+ - e_-)$ dans laquelle H représente la transmittance de l'AO. En déduire l'expression de s puis la transmittance $T = \frac{s}{e}$.

③ Dans l'expression de T , remplacer $H(jf)$ par $\frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}$ (modèle de l'AO comme filtre passe-bas du premier ordre).

④ Mettre T sous une forme normalisée connue (voir chapitre 4).

→ Application

Déterminer la bande passante à -3 dB du montage schématisé ci-dessous.



Application numérique : la fréquence de coupure de l'AO vaut $f_{AO} = 8$ Hz et son amplification statique $H_0 = 200\,000$.

Solution

- ① Exprimons tout d'abord les tensions d'entrée de l'AO avec l'hypothèse que ses courants d'entrée sont nuls :

$$e_+ = 0 \quad \text{et} \quad e_- = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{e + s}{2} \quad (\text{théorème de Millman}).$$

- ② L'AO fonctionne en régime linéaire (il comporte une réaction négative), donc nous pouvons écrire :

$$s = H e = H(e_+ - e_-) \quad (1)$$

où H est la fonction de transfert de l'AO.

$$(1) \Rightarrow s = -H \frac{e + s}{2}.$$

Nous pouvons déduire de cette équation la tension de sortie s :

$$2s = -H(e + s) \Leftrightarrow s(2 + H) = -He \Leftrightarrow s = \frac{-H}{2 + H} e.$$

La transmittance du montage a pour expression :

$$T = \frac{s}{e} = \frac{-H}{2 + H}.$$

$$\textcircled{3} \quad H = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}, \quad \text{d'où : } T = \frac{-\frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}}{2 + \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}}.$$

- ④ Mettons cette expression sous une forme normalisée :

$$T = \frac{-H_0}{2 \left(1 + j \frac{f}{f_{AO}} \right) + H_0} = \frac{-\frac{H_0}{2 + H_0}}{1 + j \frac{2f}{f_{AO}(2 + H_0)}}.$$

Cette expression peut s'identifier avec la fonction de transfert normalisée d'un filtre passe-bas du premier ordre d'amplification statique :

$$T_0 = -\frac{H_0}{2 + H_0} \text{ (obtenue pour } f \text{ tendant vers 0)}$$

et de fréquence de coupure :

$$f_C = f_{AO} \frac{2 + H_0}{2}.$$

La bande passante à - 3 dB de ce montage est donc (en Hz) :

$$\left[0 ; f_{AO} \frac{2 + H_0}{2} \right].$$

$$\text{AN : } f_C = f_{AO} \frac{2 + H_0}{2} = 8 \times \frac{2 + 200000}{2} = 800 \text{ kHz.}$$

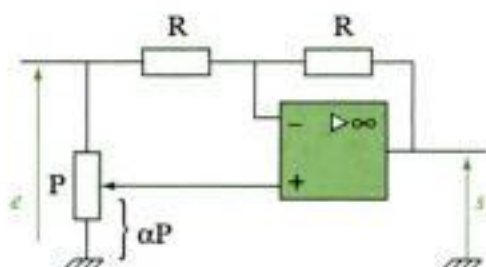
\Rightarrow **bande passante : [0 Hz ; 800 kHz].**

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Étude d'un amplificateur Inverseur/non-inverseur

Dans le montage ci-dessous, l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.



P est un potentiomètre linéaire, α représente la position du curseur ($0 < \alpha < 1$), la résistance équivalente entre le curseur et la masse vaut αP .

1) Déterminer la relation liant la tension de sortie s à la tension d'entrée e du montage.

2) En déduire l'amplification en tension :

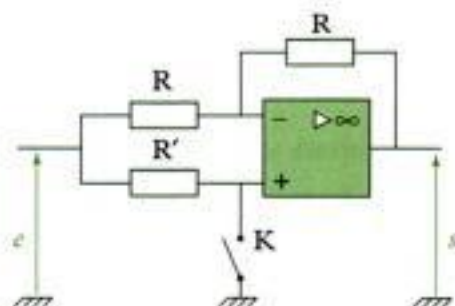
$$A = \frac{s}{e}$$

Quelles sont les valeurs extrêmes de A lorsque α , la position du curseur, varie ?

Conclure sur l'utilité d'un tel montage.

Ex. 2 Amplification en tension

Dans le montage ci-dessous, l'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

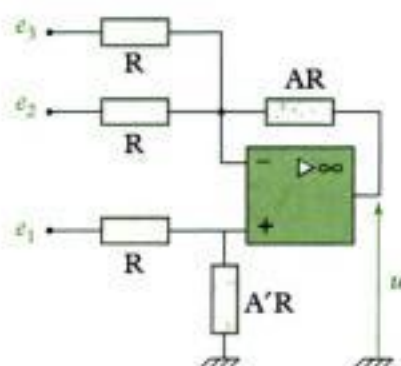


Exprimer l'amplification en tension du montage pour les deux positions de l'interrupteur K.

Ex. 3 Circuit additionneur

1) Montrer que le schéma de la figure ci-après permet d'obtenir la tension définie par :

$$u = A(e_1 - e_2 - e_3).$$



2) Exprimer le coefficient A' en fonction de A pour réaliser le montage souhaité.

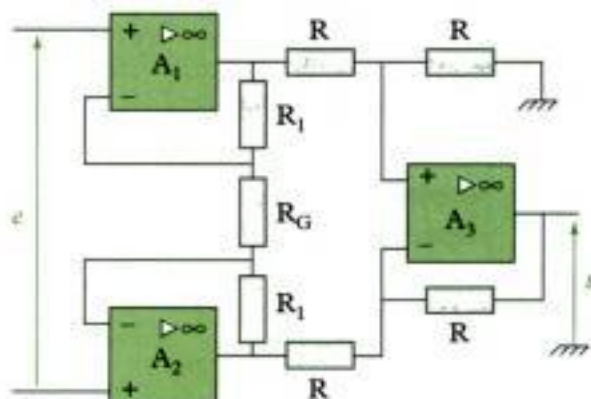
3) Disposant de résistances de valeurs R et AR , comment peut-on simplement obtenir une résistance de valeur $A'R$ ayant la valeur précédente ?

4) En déduire le schéma du montage permettant d'obtenir la tension u à partir des tensions e_1 , e_2 et e_3 avec un amplificateur opérationnel parfait et des résistances de valeurs R et AR .

D'après écrit Centrale-Supélec, PSI, 1998.

Ex. 4 Étude d'un amplificateur différentiel à trois AO

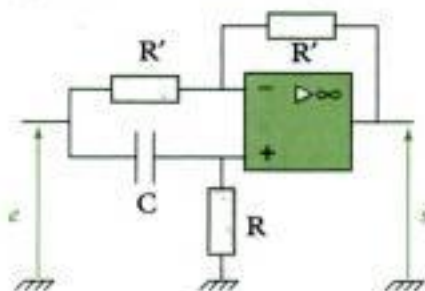
Considérons le montage suivant dans lequel les AO sont supposés parfaits :



Exprimer la tension de sortie s en fonction de e , des résistances R_1 et R_G .

Donner l'amplification en tension de ce montage.

Ex. 5 Déphaseur à avance de phase



Le signal d'entrée de ce montage s'exprime par :

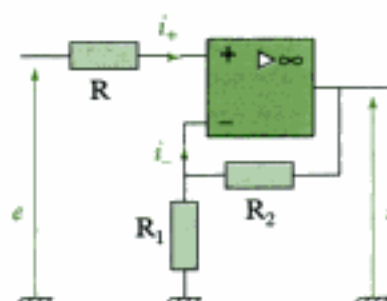
$$e(t) = E_m \cos \omega t$$

avec : $E_m < V_{SAT}$ et $\omega = \frac{1}{RC}$.

Déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$.

Niveau 2

Ex. 6 Neutralisation des courants de polarisation AO



Dans ce problème, nous considérerons que les courants d'entrée de l'AO (notés i_+ et i_-) ne sont pas nuls. Pour les autres paramètres nous supposerons l'AO idéal.

1) Exprimer s en fonction de e , i_+ et i_- .

2) On pose :

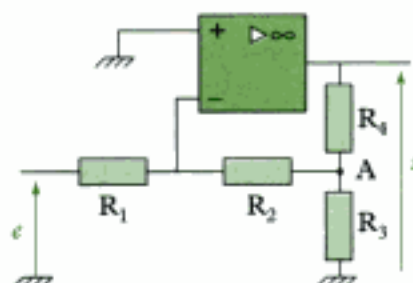
$$i_+ = i_- = I_p,$$

où I_p est le courant de polarisation de l'AO.

Montrer qu'il est possible d'éliminer l'influence de I_p en choisissant judicieusement la résistance R .

Ex. 7 Amplificateur inverseur à grande impédance d'entrée

Considérons le montage amplificateur suivant dans lequel l'AO est supposé idéal :

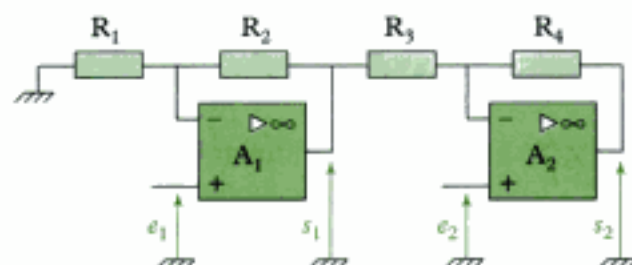


1) Exprimer la tension de sortie s en fonction de la tension d'entrée e .

2) On donne $R_1 = R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ et $R_3 = 10 \Omega$ la tension $e(t)$ est sinusoïdale d'amplitude $E_m = 1 \text{ mV}$ et l'amplitude de la tension de sortie est $S_m = 10 \text{ V}$. Calculer R_4 .

3) Quelle est l'impédance d'entrée de cet amplificateur ?

Ex. 8 Étude d'un amplificateur différentiel à deux AO



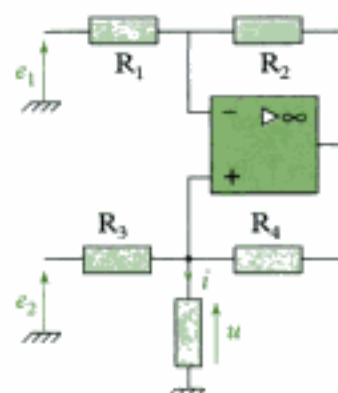
1) Exprimer s_2 en fonction de e_1 et e_2 .

2) À quelle condition ce montage réalise-t-il la fonction soustracteur ou amplificateur différentiel ?

Donner son amplification différentielle en fonction des résistances R_3 et R_4 .

Ex. 9 Convertisseur tension-courant

Considérons le montage suivant dans lequel l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire.

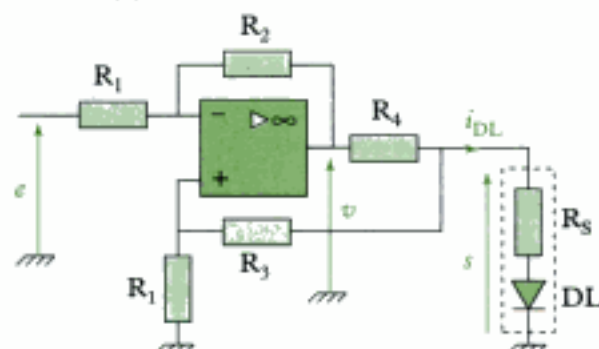


1) Donner l'expression de i l'intensité du courant dans la charge en fonction des tensions d'entrée e_1 et e_2 et de la tension u .

2) Donner la condition que doivent vérifier les résistances R_1 à R_4 pour que i soit indépendant de la charge. En déduire à ce moment-là l'expression de i . Conclusion ?

Ex. 10 Circuit de modulation d'une diode laser

Le circuit ci-dessous est destiné à moduler le courant dans une diode laser i_{DL} en fonction d'un signal d'entrée $e(t)$.



La diode laser est modélisée par une diode à jonction en série avec une résistance R_s .

Pour cette étude, nous considérerons que l'AO est parfait et qu'il fonctionne en régime linéaire.

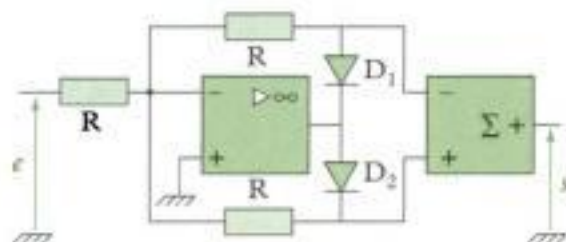
1) Exprimer v en fonction de e , s et des résistances R_1 , R_2 , R_3 .

2) Exprimer le courant i_{DL} en fonction de e , s et des résistances du montage. Montrer que pour $R_2 = R_3 + R_4$, le courant i_{DL} ne dépend pas du circuit d'utilisation (diode laser). En déduire dans ce cas la fonction du montage.

D'après écrit CCP, option MP, 1997.

Ex. 11 Montage redresseur sans seuil

On donne le montage suivant :



1) Montrer que l'AO fonctionne en régime linéaire.

2) Déterminer $s(t)$ en fonction de $e(t)$.

D'après oral Centrale-Supélec, MP, 2000.

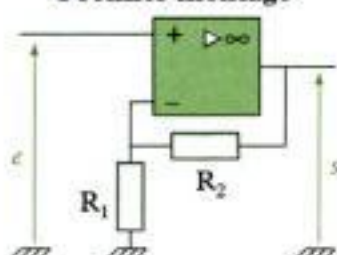
Niveau 3

Ex. 12 Étude de la stabilité d'un montage à AO

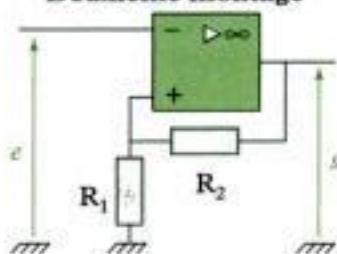
1) Écrire l'équation différentielle liant $s(t)$ à $e(t)$ pour un AO fonctionnant en régime linéaire.

2) Dans les deux montages suivants, établir l'équation différentielle du montage liant $s(t)$ à $e(t)$. Montrer que dans un cas le fonctionnement en régime linéaire conduit à un équilibre stable, alors que dans l'autre cas il est instable. Conclure.

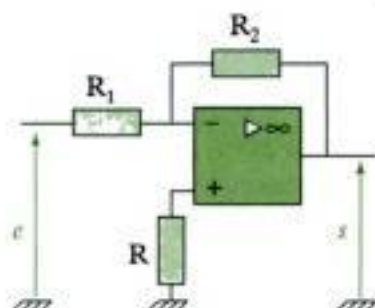
Premier montage



Deuxième montage



Ex. 13 Étude approfondie d'un amplificateur inverseur



Dans cet exercice, l'AO n'est pas nécessairement considéré idéal.

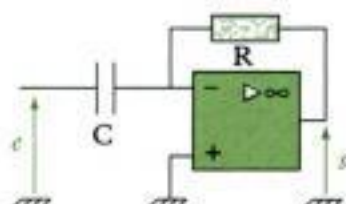
1) Déterminer pour ce montage l'amplification en tension en basses fréquences A_0 .

2) Quelle est la bande passante de cet amplificateur ?

3) Quel est le rôle de la résistance R ? Déterminer sa valeur.

Ex. 14 Montage dérivateur

On donne le montage ci-dessous, dans lequel l'AO est supposé parfait.



1) Écrire une relation entre e et s .

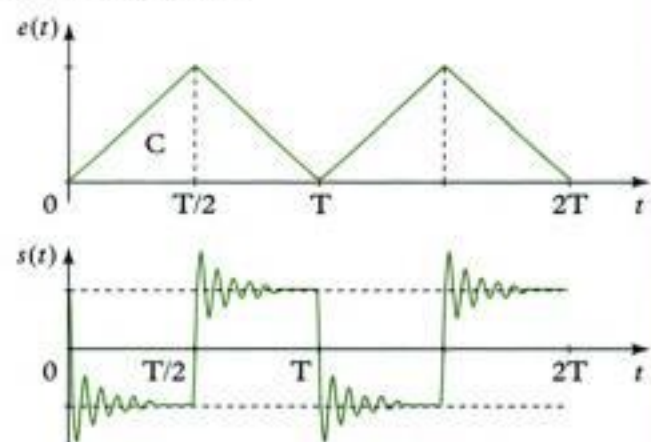
2) Donner la fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{s}{e}$$

Représenter le diagramme de Bode.

3) Les oscillogrammes ci-dessous représentent les signaux en entrée et en sortie respectivement.

Justifier le signal de sortie ; pourquoi présente-t-il de petites oscillations ?

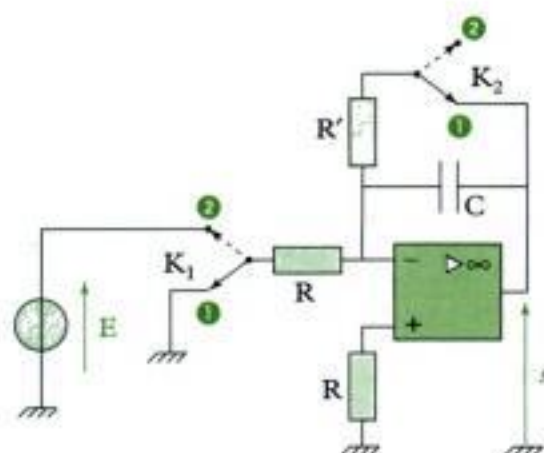


D'après oral CCP, PSI, 2003.

Ex. 15 Générateur de rampes

Le montage ci-contre comporte un AO supposé idéal et deux interrupteurs K_1 et K_2 à deux positions. La tension E appliquée à la borne ② de K_1 est continue. Initialement les interrupteurs sont en position ①. À l'instant $t = 0$, K_1 et K_2 basculent simultanément en position ②, jusqu'à l'instant $t = \tau$ où K_1 puis K_2 reviennent en ①.

- 1) Déterminer dans l'intervalle de temps $[0 ; \tau]$ la forme de la tension $s(t)$ délivrée par ce circuit.
- 2) Pour $t > \tau$, déterminer l'expression de la tension $s(t)$.
- 3) Tracer le graphe de $s(t)$ si R' est très inférieure à R . Quel rôle joue ce circuit ?



D'après écrit CCP, MP, 1997.

Indications

Ex. 3

- 3) Calculer la résistance équivalente de R en parallèle sur AR .

Ex. 4

Exprimer d'abord la tension de sortie de A_3 en fonction des tensions des sorties A_1 et A_2 , puis exprimer ensuite la différence entre les tensions de sortie de A_1 et A_2 en fonction de e .

Ex. 5

Faire l'étude en régime sinusoïdal en utilisant la notation complexe. Le déphasage est aussi l'argument de la fonction de transfert du circuit.

Ex. 6

Pour neutraliser l'influence du courant I_p , le coefficient de I_p dans l'expression de la tension de sortie doit être nul.

Ex. 8

- 2) Pour un amplificateur différentiel s peut être sous la forme $s = A(e_2 - e_1) = Ae_2 - Ae_1$.

Ex. 11

Étudier séparément les cas où $e > 0$ (D_1 conduit) et $e < 0$ (D_2 conduit).

Ex. 13

- 1) Considérer l'AO idéal.
- 2) Utiliser le modèle de l'AO comme filtre passe-bas du premier ordre.
- 3) Exprimer s en considérant les courants d'entrée non nuls et identiques (courants de polarisation de l'AO) mais en supposant $e = 0$ (régime linéaire avec amplification supposée infinie).

Ex. 14

- 3) L'AO réel se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) En supposant l'AO idéal (cf. méthode n° 1), on peut exprimer les tensions d'entrées de l'AO :

$$e_+ = \frac{\alpha \cdot P}{P} e = \alpha e \text{ par utilisation du diviseur de tension}$$

$$e_- = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{e+s}{2} \text{ d'après le théorème de Millman.}$$

L'AO comporte une réaction négative, donc fonctionne en régime linéaire, ce qui implique :

$$e_- = e_+, \text{ donc : } \frac{e+s}{2} = \alpha e$$

$$\Rightarrow s = (2\alpha - 1)e$$

2) Par définition, l'amplification en tension du montage s'exprime par $A = \frac{s}{e}$, donc :

$$A = 2\alpha - 1$$

Lorsque le curseur du potentiomètre est sur la butée haute, nous avons $\alpha = 1$, donc $A = 1$; dans le cas où il est sur la butée basse, on a $\alpha = 0$, donc $A = -1$.

Ce montage permet, à l'aide d'un potentiomètre, de faire varier l'amplification du montage entre -1 et $+1$. Ainsi, selon la position du curseur, l'amplificateur peut être inverseur ou non inverseur.

Exercice 2

Comme l'AO est parfait (cf. méthode n° 1), nous avons :

$$e_- = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{e+s}{2} \text{ d'après le théorème de Millman.}$$

On peut constater que, quel que soit la position de l'interrupteur K, la réaction négative est assurée par la résistance R, donc l'AO fonctionne en régime linéaire, ce qui implique $e_- = e_+$.

La tension e_+ va dépendre de la position de l'interrupteur K.

Premier cas : K est fermé.

$$e_+ = 0, \text{ donc : } e_- = \frac{e+s}{2} = e_+ = 0 \Leftrightarrow e+s = 0 \Leftrightarrow s = -e.$$

ce qui implique :

$$A = \frac{s}{e} = -1$$

Deuxième cas : K est ouvert.

Le courant dans la résistance R' est égal au courant consommé par l'entrée non inverseuse (i_+) car l'interrupteur K est ouvert. Comme on considère l'AO parfait, $i_+ = 0$, donc le courant dans la résistance R' est nul, ce qui implique $e_+ = e$ (pas de chute de tension dans R'). D'où :

$$e_- = \frac{e+s}{2} = e_+ = e \Leftrightarrow s = e \text{ et } A = 1$$

Exercice 3

1) L'AO est supposé idéal (cf. méthode n° 1), exprimons les tensions présentes sur ses entrées :

$$e_+ = \frac{A'R}{R+A'R}e_1 = \frac{A'}{1+A'}e_1 \quad (\text{diviseur de tension})$$

$$e_- = \frac{\frac{e_2}{R} + \frac{e_3}{R} + \frac{u}{AR}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{AR}} = \frac{A(e_2 + e_3) + u}{2A + 1} \quad (\text{théorème de Millman})$$

L'AO fonctionne en régime linéaire donc $e_+ = e_-$, ce qui implique :

$$\frac{A(e_2 + e_3) + u}{2A + 1} = \frac{A'}{1 + A'}e_1 \Leftrightarrow u = (2A + 1)\frac{A'}{1 + A'}e_1 - A(e_2 + e_3).$$

Nous souhaitons avoir le signal u sous la forme $u = A(e_1 - e_2 - e_3)$, ce qui implique :

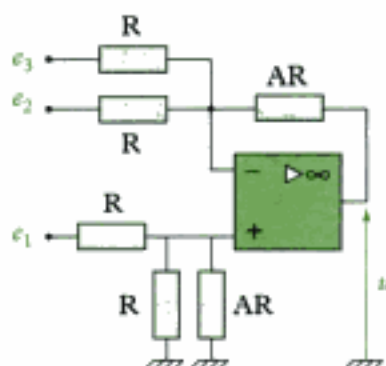
$$(2A + 1)\frac{A'}{1 + A'} = A \Leftrightarrow \boxed{A' = \frac{A}{1 + A}}$$

2) La résistance $A'R$ s'exprime selon :

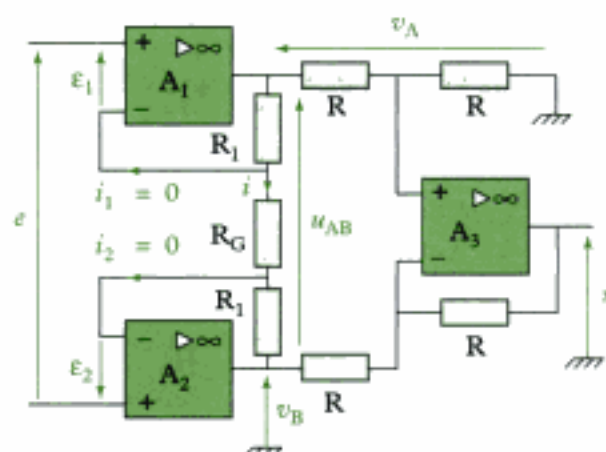
$$A'R = \frac{A}{1 + A}R = \frac{RAR}{R + AR}.$$

Cette expression est celle qui correspond à une **résistance R en parallèle sur une résistance AR** ; on peut ainsi réaliser la résistance $A'R$ de cette manière.

3) Ce qui se traduit par le schéma suivant n'utilisant que des résistances R et AR et un AO :



Exercice 4



On remarque que l'AO A_3 associé aux quatre résistances R est un montage soustracteur.

On constate que les trois AO comportent une réaction négative et fonctionnent en régime linéaire. Considérons d'abord l'AO A_3 (cf. méthode n° 1) :

$$e_+ = \frac{R}{R+R} v_A = \frac{v_A}{2} \quad \text{et} \quad e_- = \frac{\frac{v_B}{R} + \frac{s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{v_B + s}{2} \quad (\text{théorème de Millman}).$$

Puisque A_3 est considéré idéal, alors $e_- = e_+$, car il fonctionne en régime linéaire, ce qui implique :

$$\frac{v_B + s}{2} = \frac{v_A}{2} \Leftrightarrow s = v_A - v_B = u_{AB}.$$

Exprimons maintenant u_{AB} en fonction de e . Les AO A_1 et A_2 fonctionnent en régime linéaire, donc comme ils sont considérés idéaux, $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 0$, ce qui implique :

$$e = R_G i \Leftrightarrow i = \frac{e}{R_G}.$$

Nous avons d'autre part :

$$u_{AB} = (R_1 + R_G + R_1) i = \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_G}\right) e.$$

Donc :

$$s = u_{AB} = \left(1 + 2 \frac{R_1}{R_G}\right) e$$

L'amplification en tension vaut :

$$A = \frac{s}{e} = 1 + 2 \frac{R_1}{R_G}$$

Exercice 5

Le signal d'entrée étant un signal sinusoïdal, les circuits étant tous linéaires (dont l'AO qui comporte une réaction négative, donc fonctionne en régime linéaire), nous pouvons étudier ce montage en utilisant la notation complexe.

Recherchons d'abord \underline{T} la fonction de transfert du montage.

Les tensions d'entrée de l'AO s'expriment (cf. méthode n° 1) :

$$\underline{e}_+ = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} \underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e} \quad (\text{diviseur de tension})$$

$$\underline{e}_- = \frac{\frac{\underline{e}}{R'} + \frac{\underline{s}}{R'}}{\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'}} = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} \quad (\text{théorème de Millman}).$$

Si l'AO est supposé idéal, alors $\underline{e}_- = \underline{e}_+$, ce qui implique :

$$\frac{\underline{e} + \underline{s}}{2} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e} \Leftrightarrow (1 + jRC\omega)(\underline{e} + \underline{s}) = j2RC\omega \underline{e}.$$

On peut en déduire l'expression du signal de sortie \underline{s} :

$$\underline{s} = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e}.$$

Cette relation est linéaire, de la forme $\underline{s} = \underline{T} \underline{e}$ avec :

$$\underline{T} = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow |\underline{T}| = 1 \text{ et } \varphi = \text{Arg}\{\underline{T}\} = \pi - 2\text{Arctan}(RC\omega) = \frac{\pi}{2} \text{ car } \omega = \frac{1}{RC}.$$

En utilisant la relation $\underline{s} = \underline{T} \underline{e}$, on a :

$$|\underline{s}| = |\underline{T}| \cdot |\underline{e}| \Rightarrow |\underline{s}| = |\underline{T}| \cdot E_m = E_m,$$

et d'autre part :

$$\text{Arg}\{\underline{s}\} = \text{Arg}\{\underline{T}\} + \text{Arg}\{\underline{e}\} \Rightarrow \text{Arg}\{\underline{s}\} = \frac{\pi}{2} + \omega t.$$

D'après ces deux dernières propriétés, on a :

$$s(t) = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -E_m \sin(\omega t)$$

Exercices de niveau 2

Exercice 6



Ici, les courants d'entrée de l'AO ne sont pas nuls.

1) Exprimons tout d'abord les tensions d'entrée de l'AO :

$$e_+ = e - Ri_+ \text{ et } e_- = \frac{\frac{s}{R_2} - i_-}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ (théorème de Millman).}$$

La réaction négative assurée par la résistance R_2 permet un fonctionnement en régime linéaire ; donc si par ailleurs l'AO est considéré idéal, on a $\varepsilon = 0$, ce qui donne :

$$e_- = e_+ \Leftrightarrow e - Ri_+ = \frac{\frac{s}{R_2} - i_-}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

La tension de sortie s vaut donc :

$$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e - R\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)i_+ + R_2 i_-$$

Le signal de sortie s dépend des courants consommés par les entrées i_+ et i_- .



On peut retrouver la relation $s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e$ établie avec l'hypothèse de l'AO idéal en prenant $i_+ = i_- = 0$.

2) Si on a la condition $i_+ = i_- = I_P$, alors :

$$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e + \left[R_2 - R\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\right]I_P.$$

La tension de sortie ne dépendra pas du courant de polarisation I_p si la condition suivante est respectée :

$$R_2 - R \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = 0,$$

ce qui donne :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

La résistance R doit être identique à la résistance équivalente à R_1 en parallèle avec R_2 . Dans ce cas, quel que soit I_p , on a :

$$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e.$$

La tension de sortie est ainsi indépendante de I_p .

Exercice 7

1) Nous noterons v_A la tension entre le point A et la masse.

Exprimons tout d'abord les tensions d'entrée de l'AO en fonction de e et v_A :

$$e_+ = 0 \text{ et } e_- = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{v_A}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ (théorème de Millman).}$$

La réaction négative (réalisée par les résistances R_4 et R_2) implique un fonctionnement linéaire, donc :

$$\begin{aligned} e_- = e_+ &\Rightarrow \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{v_A}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{e}{R_1} + \frac{v_A}{R_2} &= 0, \text{ donc : } v_A = -\frac{R_2}{R_1} e. \end{aligned}$$

Également avec le théorème de Millman, nous pouvons exprimer la tension v_A :

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{\frac{s}{R_4} + \frac{e_-}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \\ e_- = e_+ = 0, \text{ donc : } v_A &= \frac{\frac{s}{R_4}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}. \end{aligned}$$

Ce qui implique : $s = \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} \right) \cdot v_A$ donc, comme nous avons $v_A = -\frac{R_2}{R_1} e$:

$$s = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} \right) e$$

2) L'amplification du montage s'écrit ici :

$$A = \frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} \right)$$

$$\Rightarrow |A| = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} \right) = \frac{S_m}{E_m}$$

A.N. : $|A| = \frac{S_m}{E_m} = \frac{10}{1 \cdot 10^{-3}} = 10^4$.

Nous pouvons ainsi en déduire la résistance R_4 :

$$R_4 = \frac{(R_1|A| - R_2)R_3}{R_2 + R_3}$$

A.N. : $R_4 = \frac{(1 \cdot 10^6 \times 10^4 - 1 \cdot 10^6) \times 10}{1 \cdot 10^6 + 10} = 100 \text{ k}\Omega$.

3)



L'impédance d'entrée est l'impédance équivalente vue entre l'entrée du circuit et la masse.

Comme nous l'avons montré précédemment, $e_- = e_+ = 0$, donc la source de signal e doit fournir au montage un courant $i_e = \frac{e}{R_1}$. L'impédance d'entrée du montage vaut donc :

$$Z_e = R_1 = 1 \text{ M}\Omega$$

Cette impédance est élevée, et ceci bien que le montage soit inverseur avec amplification élevée. Avec le montage amplificateur inverseur vu en cours, c'est impossible à réaliser, car en prenant $R_1 = 1 \text{ M}\Omega$

(pour conserver la même impédance d'entrée), on obtient $R_2 = 10 \text{ G}\Omega$ (pour avoir $|A| = \frac{R_2}{R_1} = 10^4$).

Exercice 8

1) Exprimons tout d'abord la tension s_1 en fonction de e_1 avec l'hypothèse de l'AO A_1 idéal (cf. méthode n° 1) :

$$e_{+1} = e_1 \quad \text{et} \quad e_{-1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s_1$$

Comme A_1 fonctionne en régime linéaire :

$$e_{+1} = e_{-1} \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} s_1 = e_1$$

$$\Rightarrow s_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot e_1$$

De même, avec A_2 idéal, on a :

$$e_{+2} = e_2 \quad \text{et} \quad e_{-2} = \frac{\frac{s_1}{R_3} + \frac{s_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad (\text{théorème de Millman})$$

A_2 fonctionne également en régime linéaire, donc :

$$e_{+2} = e_{-2} \Leftrightarrow e_2 = \frac{\frac{s_1}{R_3} + \frac{s_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

$$\Rightarrow s_2 = \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) \cdot e_2 - \frac{R_4}{R_3} \cdot s_1$$

Comme d'autre part nous avons $s_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)e_1$, la tension de sortie s_2 s'exprime :

$$s_2 = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \cdot e_2 - \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot e_1$$

2) Pour que le montage effectue la fonction soustraction (ou amplificateur différentiel), la tension de sortie s_2 doit pouvoir se mettre sous la forme $s_2 = A(e_2 - e_1)$, donc nous devons avoir :

$$\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right),$$

donc :

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

Si cette condition est vérifiée, la tension s_2 s'exprime par :

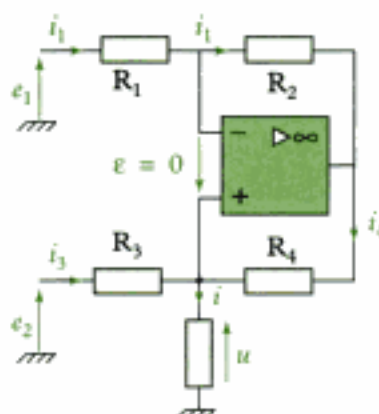
$$s_2 = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)(e_2 - e_1).$$

$(e_2 - e_1)$ représente la tension différentielle d'entrée du montage ; l'amplification différentielle A s'exprime selon :

$$A = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)$$

Exercice 9

1) Définissons tout d'abord les courants dans les différentes résistances :



L'AO étant idéal et fonctionnant en régime linéaire, nous avons $\varepsilon = 0$.



La nature du circuit de charge aux bornes duquel est prise la tension u n'est pas connue.

Déterminons tout d'abord une relation entre i_1 et i_4 en utilisant la loi des mailles :

$$R_2 i_1 + \varepsilon + R_4 i_4 = 0, \text{ ce qui implique : } i_4 = -\frac{R_2}{R_4} i_1.$$

Déterminons i_1 par application de la loi d'Ohm, sachant que $e_- = e_+ = u$:

$$i_1 = \frac{e_1 - u}{R_1}.$$

Déterminons i_3 par application de la loi d'Ohm :

$$i_3 = \frac{e_2 - u}{R_3}.$$

D'après la loi des nœuds, nous avons d'autre part $i = i_3 + i_4$, ainsi :

$$i = \frac{e_2 - u}{R_3} - \frac{R_2}{R_4} i_1 = \frac{e_2 - u}{R_3} - \frac{R_2}{R_4} \cdot \frac{e_1 - u}{R_1}$$

relation que l'on peut réécrire selon :

$$i = \frac{1}{R_3} e_2 - \frac{R_2}{R_4 R_1} e_1 + \left(\frac{R_2}{R_4 R_1} - \frac{1}{R_3} \right) u$$

2) Pour que le courant i soit indépendant de la charge, il ne doit pas dépendre de la tension u . Le coefficient de u doit être nul, donc :

$$\frac{R_2}{R_4 R_1} - \frac{1}{R_3} = 0$$

$$\Rightarrow R_2 R_3 = R_1 R_4$$

Si cette condition est vérifiée, le courant i s'exprime maintenant :

$$i = \frac{e_2 - e_1}{R_3}$$

Le courant dans la charge ne dépend maintenant que de $(e_2 - e_1)$, la tension différentielle d'entrée du montage. Ce montage permet donc de réaliser une **conversion tension-courant**.

Exercice 10

1) Exprimons les tensions d'entrée de l'AO (cf. méthode n° 1) :

$$e_- = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{v}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ (théorème de Millman) et } e_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_3} s \text{ (diviseur de tension).}$$

Comme l'AO est parfait et qu'il fonctionne en régime linéaire :

$$e_- = e_+ \Leftrightarrow \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{v}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} s.$$

Nous pouvons en déduire l'expression de la tension v :

$$v = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_3} s - \frac{R_2}{R_1} e$$

2)



Le modèle équivalent qui est donné pour la diode laser ne présente aucun intérêt pour cette question (nous pouvons constater dans la question que i_{DL} ne doit pas dépendre de R_5). Tous les calculs doivent être menés en ignorant ce modèle, donc en ne s'appuyant que sur l'AO et les résistances R_1 à R_4 .

Le courant traversant la résistance R_4 s'exprime d'après la loi d'Ohm :

$$i_{R_4} = \frac{v - s}{R_4} = \frac{R_1 + R_2}{R_4(R_1 + R_3)} s - \frac{R_2}{R_1 R_4} e - \frac{s}{R_4}.$$

Le courant traversant la résistance R_3 s'exprime d'après la loi d'Ohm :

$$i_{R_3} = \frac{s}{R_1 + R_3}.$$

Par application de la loi des nœuds, nous avons $i_{DL} = i_{R_4} - i_{R_3}$, ce qui donne :

$$i_{DL} = \frac{R_1 + R_2}{R_4(R_1 + R_3)} s - \frac{R_2}{R_1 R_4} e - \frac{s}{R_4} - \frac{s}{R_1 + R_3}$$

$$\Leftrightarrow i_{DL} = \frac{R_2 - R_3 - R_4}{R_4(R_1 + R_3)} s - \frac{R_2}{R_1 R_4} e$$

Le courant i_{DL} ne dépend pas du circuit d'utilisation s'il est indépendant de la tension s aux bornes de la diode laser, en pratique si le coefficient de s est nul. Ceci se produit lorsque la condition :

$$R_2 = R_3 + R_4$$

est réalisée, comme l'indique l'énoncé. L'expression du courant est alors :

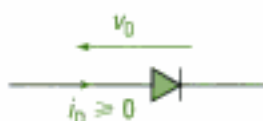
$$i_{DL} = -\frac{R_2}{R_1 R_4} e = -\frac{R_3 + R_4}{R_1 R_4} e.$$

Le courant traversant le circuit d'utilisation ne dépend dans ces conditions que de la tension d'entrée e , et plus de la tension s (donc des caractéristiques de la diode laser). Le montage ainsi réalisé est un **générateur de courant commandé par la tension d'entrée e** (convertisseur tension-courant).

Exercice 11

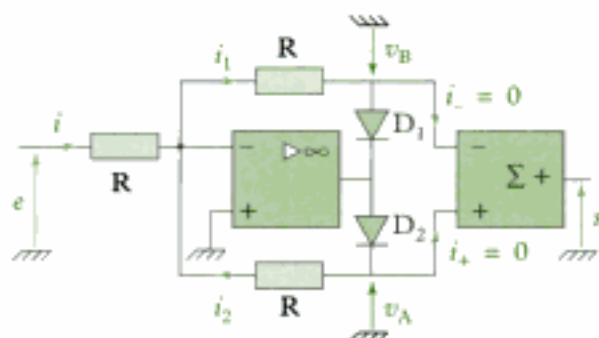


La diode est un composant non linéaire, le courant dans une diode ne peut être que positif ou nul. Lorsque le courant dans une diode est nul, nous dirons que la diode est « bloquée ».



Le montage soustracteur effectue la différence entre les tensions d'entrée qui lui sont appliquées ; nous supposons d'autre part que ses courants d'entrée sont nuls.

1) Définissons d'abord les courants et tensions dont nous aurons besoin pour la démonstration :



Supposons d'abord que l'AO fonctionne en régime linéaire (nous vérifierons par la suite si cette hypothèse est vérifiée), ce qui implique, si nous le considérons parfait, $e_- = e_+ = 0$. Le courant i s'écrit donc :

$$i = \frac{e}{R}.$$

• Si la tension e est positive, nous aurons i positif, ce qui impliquera que la diode D_1 est passante et la diode D_2 bloquée.

Le circuit $R - D_1$ assure à l'AO une réaction négative.

• Si la tension e est négative, nous aurons i négatif, ce qui impliquera que la diode D_2 est passante et la diode D_1 bloquée.

Le circuit $R - D_2$ assure à l'AO une réaction négative.

Quel que soit le signe de la tension e , l'AO possède une réaction négative, donc peut fonctionner en régime linéaire de manière stable.

2) D'après les propriétés du montage soustracteur, la tension de sortie du montage s'exprime par :

$$s = v_A - v_B.$$

Cherchons à exprimer v_A et v_B en fonction de la tension d'entrée e .

• Dans le premier cas, pour e positif, nous avons vu que D_1 conduit et D_2 est bloquée, donc :

$$i_2 = 0, \text{ donc : } i_1 = i = \frac{e}{R},$$

ce qui implique :

$$v_B = -Ri_1 = -e \text{ et } v_A = Ri_2 = 0 \text{ (car, comme nous l'avons vu, } v_- = 0 \text{)}.$$

D'où : $s = v_A - v_B = e$.

• Dans le deuxième cas, pour e négatif, nous avons vu que D_2 conduit et D_1 est bloquée, donc :

$$i_1 = 0, \text{ donc : } i_2 = -i = -\frac{e}{R},$$

ce qui implique :

$$v_B = -Ri_1 = 0 \text{ et } v_A = Ri_2 = -e.$$

D'où : $s = v_A - v_B = -e$.

Les deux cas possibles peuvent se résumer de la manière suivante :

$$s = |e|$$



Si nous appliquons en entrée de cette fonction un signal alternatif sinusoïdal, nous observerons en sortie un signal parfaitement redressé sans seuil, ce qui explique le nom de ce montage.

Exercices de niveau 3

Exercice 12



Ici, il faut considérer l'AO réel, et donc utiliser le modèle du filtre passe-bas du premier ordre donné en cours. Ce modèle donnera dans le domaine temporel une équation différentielle du premier ordre.

1) La fonction de transfert d'un AO en régime linéaire s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{\varepsilon}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{AO}}} \Leftrightarrow \underline{s} \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{AO}} \right) = H_0 \underline{\varepsilon}.$$



Lorsqu'un signal sinusoïdal est représenté par un nombre complexe, multiplier ce nombre par $j\omega$ correspond à l'opération de dérivation du signal dans le domaine temporel.

Ce qui donne l'équation différentielle suivante :

$$s(t) + \frac{1}{\omega_{AO}} \frac{ds}{dt} = H_0 \varepsilon(t).$$

En posant pour simplifier $\tau_{AO} = \frac{1}{\omega_{AO}}$ et $H_0 = \mu$, l'équation se réécrit :

$$s(t) + \tau_{AO} \frac{ds}{dt} = \mu \varepsilon(t)$$

2) • Premier montage

Avec l'hypothèse de l'AO idéal du point de vue des courants d'entrées ($i_+ = 0$ et $i_- = 0$), nous pouvons remarquer que l'on a :

$$e_+ = e(t) \text{ et } e_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t) \text{ (diviseur de tension).}$$

Exprimons $\varepsilon(t)$ la tension différentielle d'entrée de l'AO :

$$\varepsilon(t) = e_+ - e_- = e(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t).$$

Donc, en utilisant l'équation différentielle de l'AO :

$$s(t) + \tau_{AO} \frac{ds}{dt} = \mu \left(e(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t) \right) \Rightarrow \left(1 + \mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) s(t) + \tau_{AO} \frac{ds}{dt} = \mu e(t)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$$s(t) + \frac{\tau_{AO}}{1 + \mu \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{1 + \mu \frac{R_1}{R_1 + R_2}} e(t).$$

On peut poser pour simplifier :

$$\tau = \frac{\tau_{AO}}{1 + \mu \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad K = \frac{\mu}{1 + \mu \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

ce qui donne :

$$s(t) + \tau \cdot \frac{ds}{dt} = K \cdot e(t)$$

Remarquons ici que $\tau > 0$ et $K > 0$.

Pour juger de la stabilité du montage, il faut supposer un signal échelon en entrée ($e(t) = E$ pour $t > 0$, $e(t) = 0$ sinon). Dans ce cas, l'équation différentielle du premier ordre de $s(t)$ nous montre que $s(t)$ tend vers KE au bout d'un temps infini.

Le montage est stable et l'AO continuera à fonctionner en régime linéaire si $|KE| < V_{sat}$.

Remarque : la valeur finale KE sera atteinte à 1 % près au bout d'une durée 5τ .

• Deuxième montage

Dans ce cas, on a :

$$e_- = e(t) \text{ et } e_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t) \text{ (diviseur de tension)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = e_+ - e_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t) - e(t).$$

Donc, en utilisant l'équation différentielle de l'AO :

$$s(t) + \tau_{AO} \frac{ds}{dt} = \mu \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t) - e(t) \right) \Leftrightarrow \left(\mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1 \right) s(t) - \tau_{AO} \frac{ds}{dt} = \mu e(t),$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$$s(t) - \frac{\tau_{AO}}{\mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} \frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{\mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} e(t).$$

On peut poser pour simplifier :

$$\tau = \frac{\tau_{AO}}{\mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} \quad \text{et} \quad K = \frac{\mu}{\mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1},$$

ce qui donne :

$$s(t) - \tau \cdot \frac{ds}{dt} = K \cdot e(t)$$

Si $\mu \frac{R_1}{R_1 + R_2} > 1$ (ce qui est pratiquement assuré sachant que $\mu = 2 \cdot 10^5$), on a $\tau > 0$.

La solution générale de l'équation sans second membre $s(t) - \tau \frac{ds}{dt} = 0$ est $s(t) = s_0 e^{\frac{t}{\tau}}$. Elle tend mathématiquement vers l'infini. **Ce montage est donc par nature instable** ; il conduit dans tous les cas l'AO à la saturation.

Conclusion

Une réaction négative permet un fonctionnement linéaire stable, alors qu'une réaction positive donne un fonctionnement linéaire instable conduisant systématiquement l'AO à la saturation.

Exercice 13



Pour déterminer l'amplification en basses fréquences, il faut considérer l'AO idéal (amplification infinie, donc $e = 0$ en régime linéaire).

1) Nous supposons dans un premier temps l'AO idéal, donc ses courants d'entrée sont nuls ($i_+ = 0$ et $i_- = 0$). Nous pouvons ainsi exprimer simplement les tensions d'entrées e_+ et e_- :

$$e_+ = 0 \quad (\text{pas de chute de tension dans } R) \quad \text{et} \quad e_- = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{v}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (\text{théorème de Millman}).$$

Comme l'AO fonctionne en régime linéaire et possède une amplification infinie :

$$\begin{aligned} e_- = e_+, \text{ donc : } & \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{v}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{e}{R_1} + \frac{v}{R_2} = 0 \Leftrightarrow v = & -\frac{R_2}{R_1} e. \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi en déduire l'amplification du montage A_0 , définie par la relation $A_0 = \frac{v}{e}$:

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$

2)



Pour déterminer la bande passante de ce montage amplificateur, il faut prendre en compte le principal défaut de l'AO : sa limitation en fréquence. Nous devons donc le modéliser comme un filtre passe-bas du premier ordre (cf. méthode n° 2).

Pour cette étude, nous considérons un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal.

$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}$ représente la fonction de transfert en régime sinusoïdal de l'AO (modèle du filtre passe-bas du premier ordre).

Nous pouvons ainsi écrire avec l'hypothèse d'un régime linéaire :

$$\underline{s} = \underline{H} \cdot \underline{e} = \underline{H}(\underline{e}_+ - \underline{e}_-).$$

En utilisant les expressions de e_+ et e_- obtenues dans la question précédente :

$$\underline{s} = -\underline{H} \cdot \frac{\frac{\underline{e}}{R_1} + \frac{\underline{s}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = -\underline{H} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{e} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \right).$$

Nous pouvons ainsi en déduire \underline{s} en fonction de \underline{e} :

$$\underline{s} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{H}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{H}} \underline{e}.$$

La fonction de transfert du montage s'exprime donc maintenant :

$$\underline{A} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} \underline{H}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{H}}.$$



Nous pouvons remarquer ici au passage que l'on retrouve la relation $\underline{A} = A_0$ avec l'hypothèse de l'AO idéal qui implique \underline{H} infinie.

En remplaçant \underline{H} par son expression, nous obtenons :

$$\underline{A} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_{AO}}}} = \frac{-\frac{R_2 H_0}{R_1 + R_2 + R_1 H_0}}{1 + j \frac{(R_1 + R_2) f}{(R_1 + R_2 + R_1 H_0) \cdot f_{AO}}},$$

expression qui peut être identifiée à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre dont la forme normalisée s'écrit :

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}.$$

Par identification, l'amplification statique vaudra ici : $A_0 = -\frac{R_2 H_0}{R_1 + R_2 + R_1 H_0}$

et la fréquence de coupure : $f_c = \frac{R_1 + R_2 + R_1 H_0}{R_1 + R_2} f_{AO}$.



Avec l'hypothèse de H_0 infinie (AO parfait), nous pouvons retrouver la relation $A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$.

L'amplificateur inverseur ainsi réalisé aura une bande passante :

$$\left[0 ; \frac{R_1 + R_2 + R_1 H_0}{R_1 + R_2} f_{AO} \right].$$

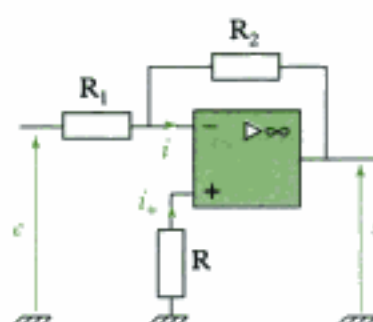
Ce qui correspond à une largeur de bande passante :

$$\Delta f = \frac{R_1 + R_2 + R_1 H_0}{R_1 + R_2} f_{AO}.$$

3) La résistance R sert à compenser les courants de polarisation de l'AO, c'est-à-dire qu'elle rend la tension de sortie indépendante des courants d'entrée de l'AO (supposés non nuls mais identiques : $i_+ = i_- = I_p$).



Pour déterminer la valeur de R , il faut revenir sur l'hypothèse de l'AO parfait en supposant maintenant $i_+ \neq 0$ et $i_- \neq 0$.



$$e_+ = -Ri_+ \text{ et } e_- = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} - i_-}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ (théorème de Millman).}$$

L'AO fonctionne en régime linéaire ; si on considère son amplification infinie, nous avons :

$$e_- = e_+, \text{ donc : } \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} - i_-}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = -Ri_+.$$

La tension s s'écrit donc :

$$s = -\frac{R_2}{R_1}e + R_2i_- - R\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)i_+$$

ce qui nous donne, si l'on a $i_+ = i_- = I_p$:

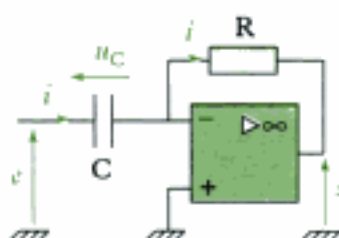
$$s = -\frac{R_2}{R_1}e + \left[R_2 - R\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\right]I_p.$$

La tension de sortie sera indépendante du courant de polarisation I_p si $R_2 - R\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 0$, ce qui implique :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

Exercice 14

1) Définissons tout d'abord le courant i dans la résistance R :



L'AO étant supposé parfait, le courant entrant dans la borne inverseuse est nul, donc le courant dans la résistance R est le même que celui dans le condensateur C .

L'AO fonctionne en régime linéaire, donc $e_- = e_+ = 0$. Ce qui implique :

$$u_C = e \quad \text{et} \quad s = -Ri,$$

avec : $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{de}{dt}$. D'où :

$$s = -RC \frac{de}{dt}$$



Nous retrouvons la relation mathématique du montage dérivateur, conformément au schéma donné.

2) Recherchons à présent la fonction de transfert du circuit linéaire en supposant un signal d'entrée sinusoïdal de pulsation ω .



Deux méthodes peuvent être utilisées :

- La première consiste à faire un schéma équivalent dans lequel chaque dipôle (ici la résistance et le condensateur) est remplacé par son impédance. Le nouveau schéma permet d'étudier ce montage en régime sinusoïdal comme un filtre.
- La deuxième méthode, plus rapide, consiste à s'appuyer sur le fait que la dérivation dans le domaine temporel est en fait équivalente à une multiplication du complexe associé par $j\omega$. Nous utiliserons cette méthode.

$s = -RC \frac{de}{dt}$ se traduit en notation complexe par :

$$\underline{s} = -jRC \omega \underline{e}.$$

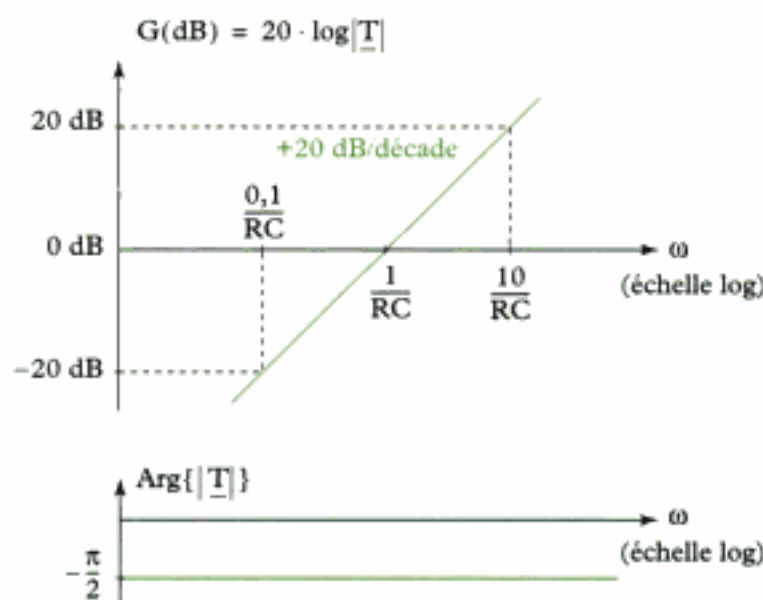
La fonction de transfert du montage s'exprime selon :

$$\underline{T} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -jRC\omega$$

Le module de cette fonction de transfert vaut : $|\underline{T}| = RC\omega$.

L'argument de cette fonction de transfert vaut : $\text{Arg}\{\underline{T}\} = -\frac{\pi}{2}$.

Diagrammes de Bode :



Les diagrammes de Bode obtenus sont purement théoriques, ils ont été obtenus avec l'hypothèse d'un AO parfait (amplification infinie quelle que soit la fréquence). En pratique, le gain du montage ne peut tendre vers l'infini lorsque la fréquence tend vers l'infini.

- 3) - De $t = 0$ à $t = \frac{T}{2}$, $e(t)$ croît linéairement, donc $\frac{de}{dt}$ est une constante positive, ce qui implique que le signal de sortie doit être d'après la relation $s = -RC \frac{de}{dt}$ une constante négative (valable si $|s(t)| < V_{sat}$).
- De $t = \frac{T}{2}$ à $t = T$, $e(t)$ décroît linéairement, donc $\frac{de}{dt}$ est une constante négative, ce qui implique que le signal de sortie doit être d'après la relation $s = -RC \frac{de}{dt}$ une constante positive.

Le signal observé devrait donc avoir la forme suivante :



En pratique, nous pouvons observer des oscillations autour du signal théorique. Ces oscillations proviennent du fait que l'AO utilisé étant réel, le circuit n'est pas rigoureusement un dérivateur ; en particulier le gain ne peut tendre vers l'infini lorsque la fréquence tend vers l'infini.

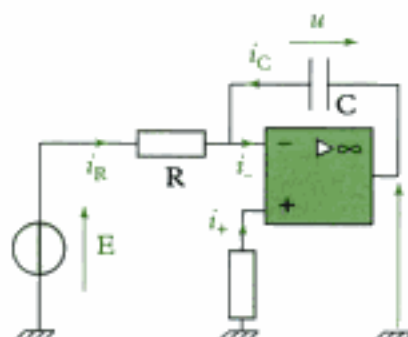
En modélisant l'AO comme un filtre passe-bas du premier ordre, nous avons montré en cours que ce dérivateur est en fait un filtre passe-bande du second ordre, qui offre donc des possibilités d'oscillations pour certains signaux d'entrée.

Le caractère dérivateur de ce circuit n'est valable que dans une bande de fréquences restreinte, pour laquelle $T \approx -jRC\omega$.

Exercice 15

- 1) Initialement, les interrupteurs sont en position ❶, ce qui permet de supposer que le condensateur est déchargé à $t = 0$. Les interrupteurs basculent alors simultanément en position ❷.

Le schéma équivalent au montage est alors :



Comme l'AO est idéal, $i_+ = 0$, ce qui implique que le potentiel de l'entrée non inverseuse est nul : $e_+ = 0$. L'AO fonctionne de plus en régime linéaire, donc : $e_- = e_+ = 0$.

Le courant i_R s'écrit donc :

$$i_R = \frac{E}{R}$$

La tension aux bornes du condensateur vaut : $u = s$, donc :

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{ds}{dt}$$

D'après la loi des nœuds : $i_R + i_C = i_- = 0$ (AO idéal)

$$\Rightarrow \frac{E}{R} + C \frac{ds}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = -\frac{E}{RC}$$

On en déduit $s(t)$ sachant qu'initialement le condensateur est déchargé :

$$s(t) = -\frac{E}{RC}t \text{ pour } 0 \leq t \leq \tau$$

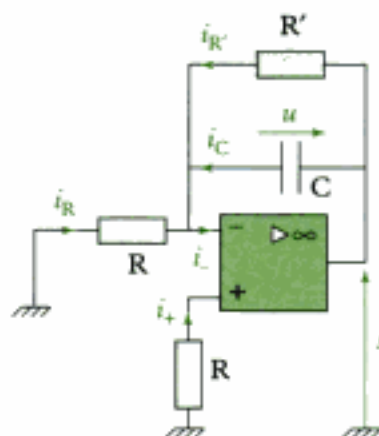
La tension $s(t)$ décroît linéairement dans le temps sur cet intervalle de temps.

Pour $t = \tau$, $s(\tau) = -\frac{E}{RC}\tau$,



Cette propriété était prévisible, car comme la tension E est constante, l'intensité i_C , identique à i_R , est également constante, donc le condensateur se charge à courant constant, ce qui implique que la tension à ses bornes va croître linéairement en valeur absolue.

2) Les interrupteurs étant revenus en position ❶, le schéma du montage est représenté ci-dessous :



Comme l'AO est idéal, $i_+ = 0$, ce qui implique que le potentiel de l'entrée non inverseuse est nul : $e_+ = 0$. Il fonctionne toujours en régime linéaire :

$$e_- = e_+ = 0$$

ce qui implique que le courant dans la résistance R est nul ($i_R = 0$) et la tension aux bornes du condensateur vaut :

$$u = s.$$



Le condensateur va donc se décharger à travers la résistance R' .

Nous avons d'autre part :

$$i_C = C \frac{du}{dt} \text{ et } i_{R'} = \frac{u}{R'}.$$

Avec : $i_C + i_{R'} + i_R = i_- = 0$, il vient :

$$C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R'} = 0.$$

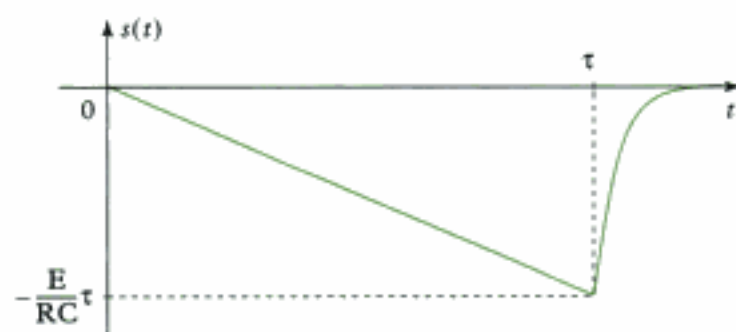
Comme $u = s$, on a :

$$s + R'C \frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow s(t) = A \exp\left(-\frac{t-\tau}{R'C}\right).$$

La constante A est déterminée en traduisant la continuité de la tension s à l'instant $t = \tau$, soit :

$$s(t) = -E \frac{\tau}{RC} \exp\left(-\frac{t-\tau}{R'C}\right) \text{ pour } t > \tau$$

3) Comme nous avons R' très inférieure à R , le temps de décharge du condensateur sera très inférieur à son temps de charge, ce qui donne l'allure suivante pour le graphe de $s(t)$:



Ce montage permet de générer pendant une durée déterminée τ une « rampe », c'est-à-dire un signal qui varie linéairement avec le temps.

Fonction filtrage

Introduction

Ce chapitre est consacré à la fonction filtrage qui a été abordée en première année. Cette fonction fait clairement ressortir l'action d'un système dans l'espace des fréquences par l'étude de sa fonction de transfert. Nous savons aussi qu'un système peut s'étudier dans le domaine temporel à partir de l'équation différentielle qui lui est associée.

Un signal possède donc à la fois une représentation dans le domaine temporel et une représentation dans l'espace des fréquences. Ces représentations sont complémentaires l'une de l'autre et permettent, chacune, de comprendre et de prévoir le fonctionnement d'un système linéaire.

Plan du chapitre 4

A. Rappels sur la fonction du filtrage.	124
1. Introduction	124
2. Classification des filtres	124
3. Rappel des notations	125
B. Filtre passe-bas actif	125
1. Filtre passe-bas actif du premier ordre	125
2. Filtre passe-bas actif du deuxième ordre	129
3. Conclusion sur le filtrage passe-bas	132
C. Filtre passe-haut actif	133
1. Filtre passe-haut du premier ordre	133
2. Conséquence de la bande passante de l'amplificateur opérationnel réel	136
3. Conclusion sur le filtrage passe-haut	137
4. Fonction de transfert normalisée d'un filtre passe-haut du deuxième ordre	137
D. Filtre passe-bande actif	138
1. Fonction de transfert normalisée	138
2. Exemple de montage	139
3. Conclusion sur le filtrage passe-bande	144
4. Caractères dérivateur et intégrateur d'un filtre passe-bande du deuxième ordre	144
E. Filtre coupe-bande	144
F. Conclusion du chapitre	145
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	146
Énoncés des exercices	152
Solutions des exercices	159

A. Rappels sur la fonction du filtrage

A.1. Introduction

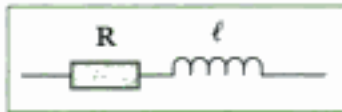


Fig. 1 - Modèle électrique équivalent d'un conducteur ohmique à fréquence élevée.

Un système électronique est toujours conçu pour *travailler dans une gamme de fréquence bien définie et nécessairement limitée*. En effet, les propriétés des composants électroniques sont toujours définies sur une gamme de fréquence. Par exemple, un conducteur ohmique est en partie de nature inductive, et ce d'autant que sa fréquence de travail est élevée, comme le montre son modèle électrique équivalent (fig. 1). Nous pouvons dire qu'en règle générale un système ne fonctionnera que sur quelques décades de fréquences.

Le tableau récapitulatif présenté (fig. 2) indique les domaines répertoriés de fréquences¹ :

Gammes de fréquences	Fréquences
Très basses fréquences (TBF)	< 30 kHz
Basses fréquences (BF)	30 – 300 kHz
Fréquences intermédiaires (FI)	0,3 – 3 MHz
Hautes fréquences (HF)	3 – 30 MHz
Très hautes fréquences (THF)	3 – 300 MHz
Ultra hautes fréquences (UHF)	0,3 – 3 GHz
Ondes centimétriques (SHF)	3 – 30 GHz
Ondes millimétriques (EHF)	30 – 300 GHz

Fig. 2 - Tableau des domaines de fréquences répertoriés.

En définitive, nous pouvons dire que le comportement d'un système est toujours associé à un domaine fréquentiel.

Un quadripôle linéaire peut remplir le rôle de filtre en transmettant à sa sortie le signal appliqué à son entrée. La *linéarité*² permettant de s'intéresser à la transmission de chaque harmonique constituant le signal d'entrée, le signal de sortie est obtenu par *superposition* des signaux de sortie correspondant à chacun des harmoniques. Cependant, chaque harmonique ne subit pas nécessairement le même filtrage que les autres : il peut être plus ou moins atténué, plus ou moins déphasé. Aussi, l'étude d'un filtre est menée en régime sinusoïdal de fréquence variable : ceci permet de connaître le comportement du filtre *pour chacun des harmoniques du signal d'entrée*.

Pour terminer cette présentation, citons quelques exemples d'application des filtres : élimination de parasites, extraction de la valeur moyenne d'un signal, élimination de la composante continue d'un signal, extraction d'un signal parmi d'autres (réception radio).

A.2. Classification des filtres

Commençons par rappeler les principaux types de filtres.

- **Filtre passe-bas** : il transmet les basses³ fréquences et atténue les hautes fréquences.
- **Filtre passe-haut** : il transmet les hautes fréquences et atténue les basses fréquences.
- **Filtre passe-bande** : il transmet les signaux entre les basses et les hautes fréquences.

1. La gamme des fréquences comprises entre 0,3 GHz et 300 GHz constitue le domaine des hyperfréquences.

2. Si le quadripôle contient un élément non linéaire comme par exemple une diode, le signal de sortie peut présenter des harmoniques supplémentaires à ceux du signal d'entrée. Ce cas n'est pas au programme.

3. La notion de « haute » ou de « basse » fréquence est en pratique relative au système étudié, c'est-à-dire à une fréquence de référence. Elle n'est pas rattachée aux gammes données en figure 2.

1. À la limite, la bande passante se réduit idéalement à une seule fréquence : le filtre est « infiniment » sélectif.

2. Le cas limite d'une bande coupée réduite idéalement à une seule fréquence correspond à un filtre dit *réjecteur de fréquence*.

3. Citons également l'utilisation courante en pratique de transistors, que nous ne présenterons pas dans le cadre du programme.

4. Communément appelés filtres à capacités commutées.

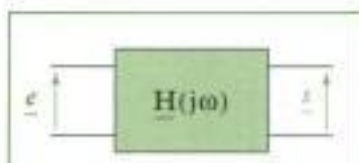


Fig. 4 - Notations associées au calcul de la fonction de transfert du filtre.

5. Conformément au programme de la classe de PSI.

• **Filtre coupe-bande** : il élimine les signaux entre les basses et les hautes fréquences.

La notion de haute ou basse fréquence est toujours relative à des fréquences particulières f_C appelées fréquences de coupure et délimitant la bande passante du filtre considéré. Résumons cette classification (fig. 3) :

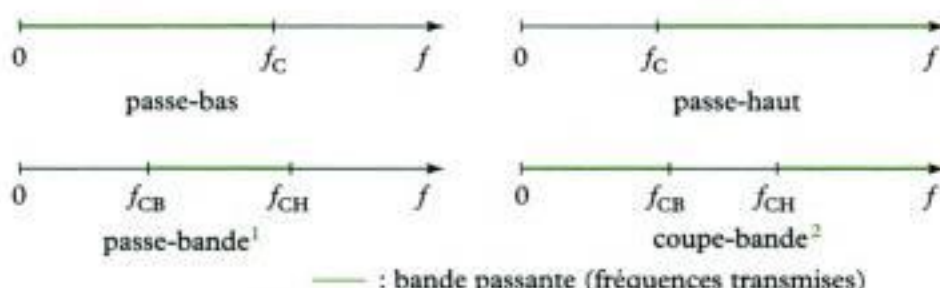


Fig. 3 - Récapitulatif des principales actions de filtrage.

Il existe d'autre part plusieurs technologies de réalisation des filtres.

- **Filtres passifs** : ils ne comportent que des éléments passifs (conducteurs ohmiques, condensateurs, bobines).
- **Filtres actifs** : ils comportent en plus des éléments passifs des éléments actifs (amplificateur opérationnel, par exemple³).
- **Filtres à condensateurs commutés⁴** : un circuit intégré associe des condensateurs et des interrupteurs électroniques commutés périodiquement, pour réaliser des filtres qui ont la particularité d'être très précis et ajustables.
- **Filtres numériques** : les valeurs du signal de sortie sont déterminées par calculateur numérique à partir d'échantillons du signal d'entrée.

A.3. Rappel des notations

Les notations employées dans ce chapitre ont été introduites dans le chapitre 1 et sont rappelées en figure 4 pour un filtre quelconque de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$$

Bien évidemment, la fonction de transfert d'un filtre dépend de la fréquence. Dans les paragraphes qui vont suivre, nous allons étudier les principaux types de filtres précédemment cités et qui seront exclusivement⁵ réalisés à partir d'amplificateurs opérationnels, et donc actifs.

B. Filtre passe-bas actif

Le programme de la classe stipule qu'aucun montage particulier n'est exigible. Il importe ainsi, avant tout, de savoir étudier un montage quelconque.

B.1. Filtre passe-bas actif du premier ordre

B.1.1 - Fonction de transfert normalisée

Propriété 1

La fonction de transfert d'un **filtre passe-bas du premier ordre**, de fréquence de coupure f_C s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_C} = \frac{f}{f_C}.$$

H_0 désigne l'amplification dans la bande passante (dans le cas idéal) ; c'est aussi l'amplification maximale du filtre.

ω_C est appelée la *pulsation de coupure* du filtre.

Remarque : il est aussi possible d'utiliser la notation opérationnelle pour écrire la fonction de transfert qui se note alors $H(p)$ en posant $p = j\omega$ qui est la variable de Laplace limitée aux imaginaires purs. Ainsi, dans le cas du filtre passe-bas du premier ordre, la fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_C}}.$$

1. L'exercice 6 de ce chapitre est résolu en utilisant la notation opérationnelle p .

Dans ce chapitre, nous privilégierons¹ l'utilisation de la notation $H(j\omega)$ afin de conserver la grandeur fréquentielle ω apparente. Dans certains chapitres qui suivront, la notation opérationnelle est au contraire préférable ou d'usage.

B.1.2 - Exemple de montage

Considérons le montage donné en figure 5 fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :

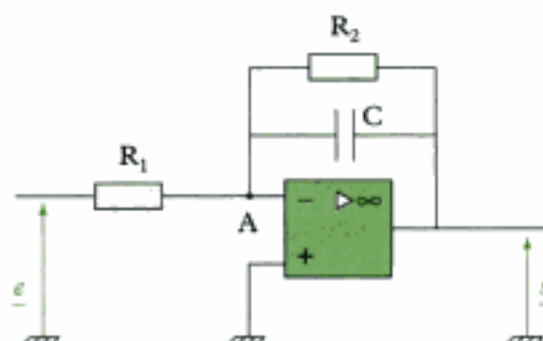


Fig. 5 - Exemple de filtre actif passe-bas du premier ordre.

• Étude en régime sinusoïdal

Commençons par établir l'expression de la fonction de transfert associée à ce montage alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Comme l'amplificateur opérationnel est idéal, $e^- = e^+ = 0$ et en appliquant par exemple le théorème de Millman au point A, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} + jC\omega s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jC\omega} &= 0 \text{ puisque } e^- = 0 \Leftrightarrow s \left(\frac{1}{R_2} + jC\omega \right) = -\frac{e}{R_1} \\ \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{s}{e} = -\frac{1}{R_1} \frac{1}{\frac{1}{R_2} + jC\omega} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2C\omega}. \end{aligned}$$

L'identification avec la forme normalisée de la propriété 1 conduit à :

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}, \quad \omega_C = \frac{1}{R_2C}.$$

Nous en déduisons l'allure des diagrammes de Bode associés à la fonction de transfert, tels qu'ils ont été vus en première année, en supposant par exemple $R_2 > R_1$ (fig. 6).

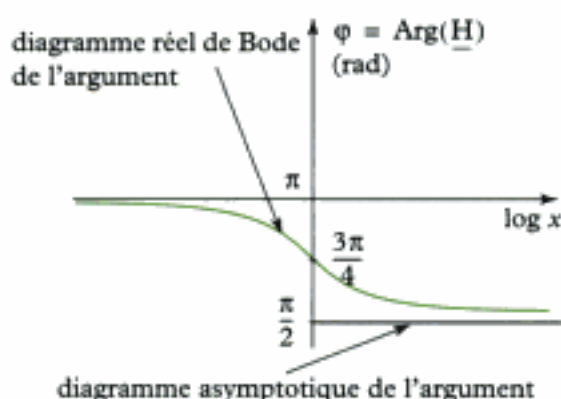
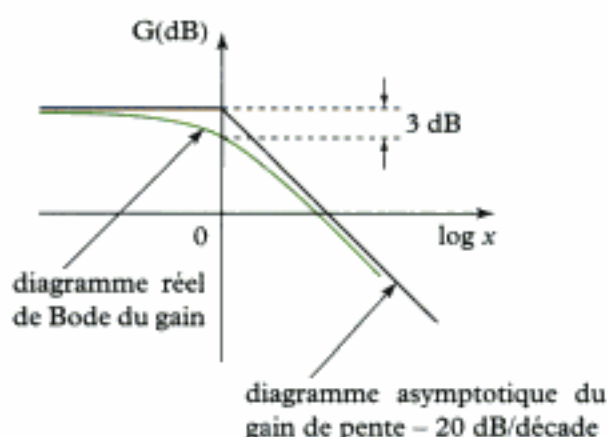


Fig. 6 - Diagrammes de Bode du filtre passe-bas actif du premier ordre si $R_2 > R_1$.

1. Ou signal crête à crête.

2. L'amplitude est définie par la suite comme la moitié de la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale du signal.

• Effets du filtre sur un signal périodique carré¹

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, de période 10 ms, d'amplitude² 2 V et possédant une composante continue (ou « offset ») égale à 1 V. La figure 7 donne les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ obtenus par simulation en prenant les valeurs de composants suivantes : $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$ et $C = 10 \text{ nF}$.

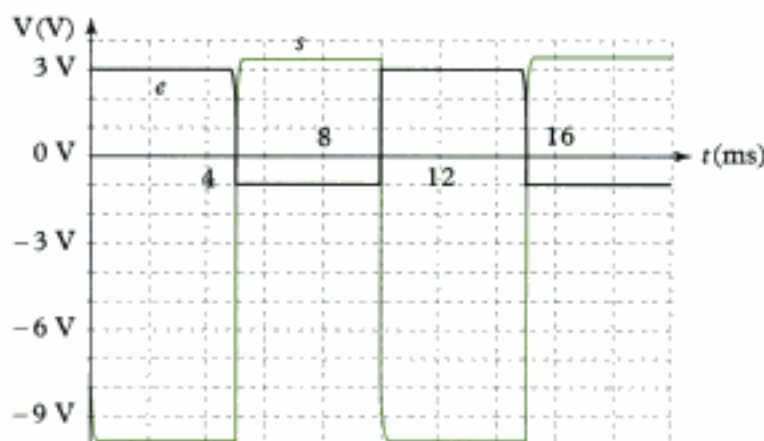


Fig. 7 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) : le signal de sortie est d'allure voisine de celui d'entrée, il est donc peu déformé par le filtre ;
- (2) : $s(t)$ n'est jamais discontinu ;
- (3) : $s(t)$ est pratiquement en opposition de phase avec $e(t)$;
- (4) : $s(t)$ possède une valeur moyenne voisine de $-3,3 \text{ V}$.

Certaines de ces observations peuvent s'interpréter assez simplement :

- (3) traduit le fait que le montage est de type inverseur comme l'indique le signe moins apparaissant dans l'expression de la fonction de transfert ;
- (4) s'explique en remarquant qu'une composante continue correspond à un signal de période « infinie » donc de fréquence nulle. En multipliant la valeur de la composante continue de $e(t)$ par la valeur de l'amplification :

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1} = -3,3,$$

nous trouvons en effet une valeur moyenne de $s(t)$ égale à $-3,3 \text{ V}$.

Pour interpréter les autres observations, nous proposons la représentation des spectres d'amplitude³ des signaux d'entrée et de sortie en figure 8.

3. Les simulations qui sont présentées dans l'ensemble de cet ouvrage font apparaître la valeur efficace des harmoniques visibles dans le spectre du signal étudié et non leur amplitude. Le passage à l'amplitude se fait par simple multiplication de la lecture par le facteur $\sqrt{2}$. Dans un problème, il convient de déterminer s'il en est de même car un tel choix n'est pas systématique !

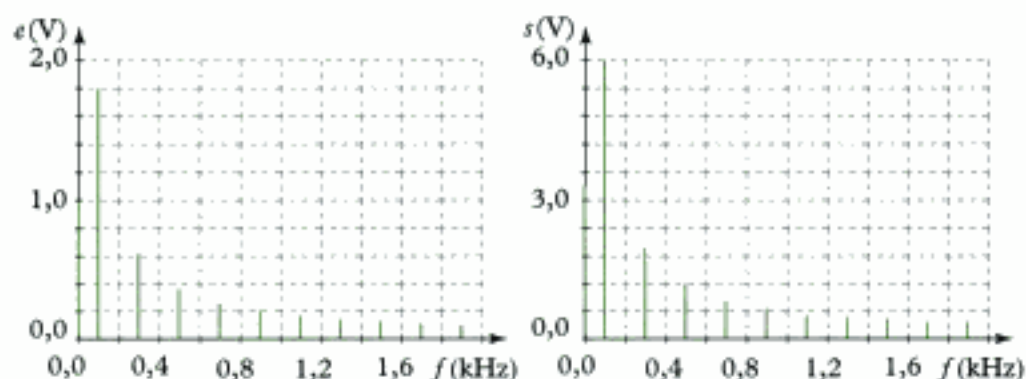


Fig. 8 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons alors conclure que :

- (1) est corroborée par le fait que le spectre du signal de sortie est semblable à celui du signal d'entrée, à un facteur multiplicatif près. En effet, si nous calculons numériquement la fréquence de coupure f_C du filtre, nous obtenons :

$$f_C = \frac{1}{2\pi R_2 C} = 4,8 \text{ kHz.}$$

Tous les harmoniques d'amplitude significative sont donc situés dans la bande passante du filtre. Il est donc normal que l'allure du signal de sortie soit voisine de celle du signal d'entrée puisque les spectres sont semblables.

- (2) s'interprète en remarquant que l'amplitude des harmoniques *hautes* fréquences est faible devant celle des harmoniques de premier rang. En effet, les harmoniques *hautes* fréquences sont la traduction, dans l'*espace fréquentiel*, de *brusques* changements d'états du signal d'entrée dans le domaine *temporel*.

B.1.3 - Caractère intégrateur d'un filtre passe-bas du premier ordre

Les diagrammes de Bode rappelés en figure 6 montrent que pour des fréquences très supérieures à f_C , c'est-à-dire en pratique au moins 10 fois plus élevées, le filtre se comporte comme un intégrateur puisque dans cette gamme de fréquences, nous avons :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{jx} = \frac{H_0 f_C}{jf}.$$

Il s'agit bien de la fonction de transfert d'un intégrateur telle que nous l'avons présentée au chapitre précédent. Retenons dès lors :

Un filtre présente **un effet intégrateur** dans une gamme de fréquences si :

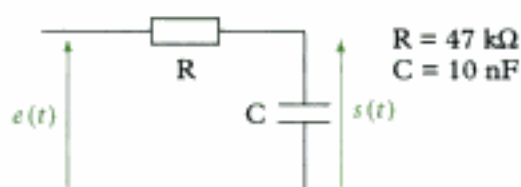
- le gain en décibels possède une pente de -20 dB par décade dans cette gamme ;
- le signal de sortie est en quadrature¹ de phase avec le signal d'entrée dans cette gamme.

1. Il peut s'agir d'une avance ou d'un retard de phase selon le signe de H_0 .

Application 1 Effet intégrateur

Un signal carré périodique $e(t)$, de fréquence 50 kHz, est appliqué à l'entrée du circuit représenté ci-contre qui est supposé ne débiter aucun courant en sortie.

Quelle est l'allure du signal de sortie du montage $s(t)$?



Solution

Déterminons la fréquence de coupure de ce filtre dont la fonction de transfert s'obtient en utilisant un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_C}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas (passif) dont la fréquence de coupure vaut :

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC} \approx 339 \text{ Hz.}$$

La fréquence du signal d'entrée est environ $\frac{50\,000}{339} = 147$ fois plus élevée que f_0 ; par conséquent, le signal d'entrée appartient entièrement (c'est-à-dire tous ses harmoniques) à la bande coupée qui donne donc au filtre passe-bas d'ordre 1 un caractère intégrateur.

$s(t)$ est donc obtenu en intégrant le signal d'entrée carré, ce qui conduit à un signal de sortie triangulaire, déphasé ici de $\frac{\pi}{2}$ en arrière sur $e(t)$.

Remarque : l'effet intégrateur est également présent dans une des bandes coupées d'un filtre passe-bande du deuxième ordre comme nous le verrons au paragraphe D.

B.2. Filtre passe-bas actif du deuxième ordre

B.2.1 - Fonction de transfert normalisée

Propriété 2

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas du deuxième ordre, de fréquence de coupure f_C , s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Dans cette expression, ω_0 est appelée *pulsation propre* du filtre (exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Q désigne le *facteur de qualité*.

Il est aussi possible de normaliser la fonction de transfert en introduisant le *facteur d'amortissement* m^1 défini par :

$$m = \frac{1}{2Q}$$

La fonction de transfert se réécrit alors selon :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2mjx + (jx)^2}$$

B.2.2 - Exemple de montage

Considérons le montage donné en [figure 9](#) fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est toujours supposé idéal et le montage sans charge en aval.

¹ Ce paramètre est plus utilisé dans l'étude de la réponse des systèmes linéaires en termes de stabilité ; le facteur de qualité est plus approprié à la description de l'opération de filtrage notamment en terme de sélectivité.

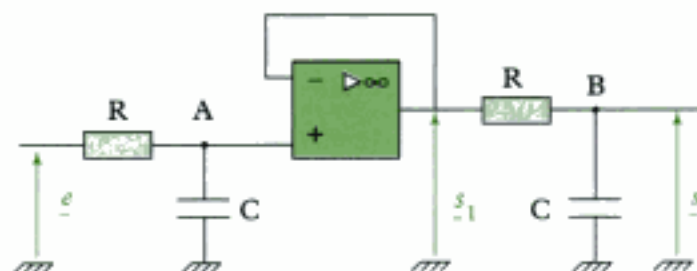


Fig. 9 - Exemple de filtre actif passe-bas du deuxième ordre.

• Étude en régime sinusoïdal

La fonction de transfert peut être établie par exemple à l'aide d'un diviseur de tension appliqué en A :

$$\underline{e}^+ = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e}, \text{ puisque } \underline{i}^- = 0.$$

Sachant que $\underline{e}^+ = \underline{e}^- = \underline{s}_1$, nous avons donc : $\underline{s}_1 = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e}$ (1).

De même, en utilisant le diviseur de tension appliqué en B, nous avons :

$$\underline{s} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{s}_1 \quad (2).$$

En reportant l'expression de \underline{s}_1 issue de (1) dans (2), il vient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right) \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right) = \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right)^2 \quad (3).$$

L'identification avec la forme normalisée donnée en propriété 2 conduit après développement de (3) à :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}; \quad \frac{1}{Q\omega_0} = 2RC \Rightarrow Q = \frac{1}{2} \text{ (ou } m = 1 \text{)}; \quad H_0 = 1.$$

Nous en déduisons en figure 10 l'allure des diagrammes de Bode obtenus en prenant les valeurs de composants $R = 33 \text{ k}\Omega$ et $C = 47 \text{ nF}$.

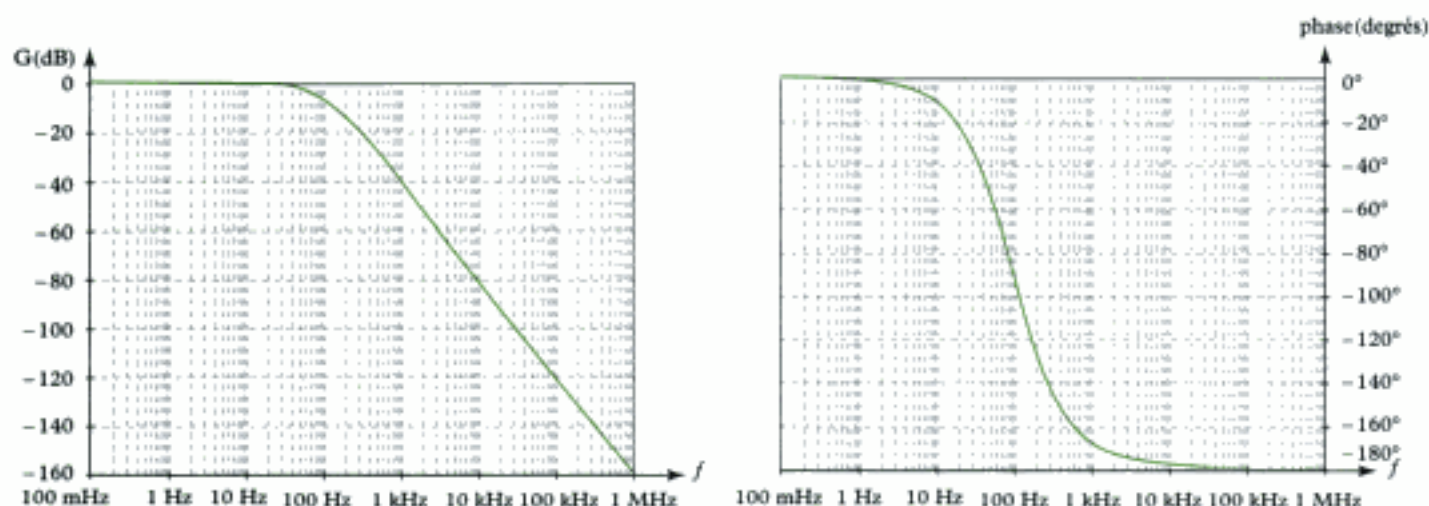


Fig. 10 - Diagrammes de Bode du filtre actif passe-bas du deuxième ordre de la figure 9.

• Effets du filtre sur un signal périodique carré

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, de période 10 ms, d'amplitude 6 V et possédant une composante continue égale à 1 V. La figure 11 donne les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ obtenus par simulation et en prenant les mêmes valeurs de composants :

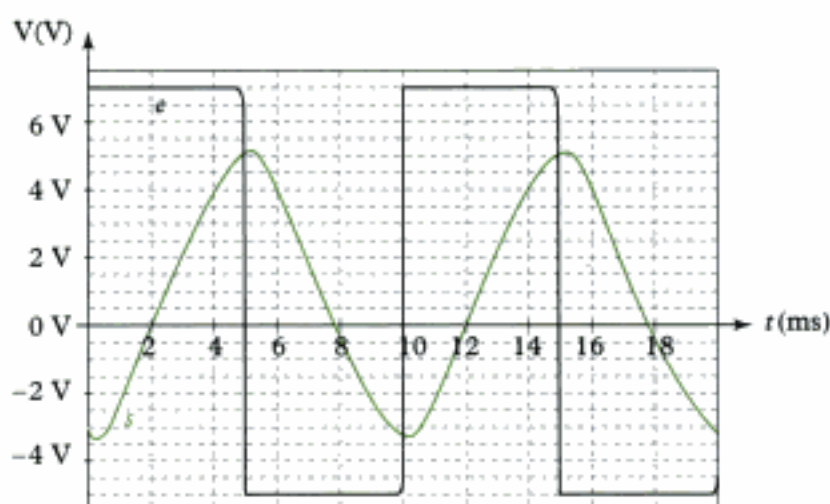


Fig. 11 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) : le signal de sortie, proche du signal sinusoïdal, a donc une allure très différente du signal d'entrée qui est ainsi très déformé par le filtre ;
- (2) : $s(t)$ n'est jamais discontinu ;
- (3) : $s(t)$ et $e(t)$ ont la même valeur moyenne.

(3) s'interprète facilement à partir de l'expression de la fonction de transfert : vu que $H_0 = 1$, les composantes continues sont donc effectivement identiques en entrée et en sortie du filtre.

Pour interpréter les autres observations faites, nous proposons les simulations logicielles des spectres d'amplitude des signaux d'entrée et de sortie en figure 12 :

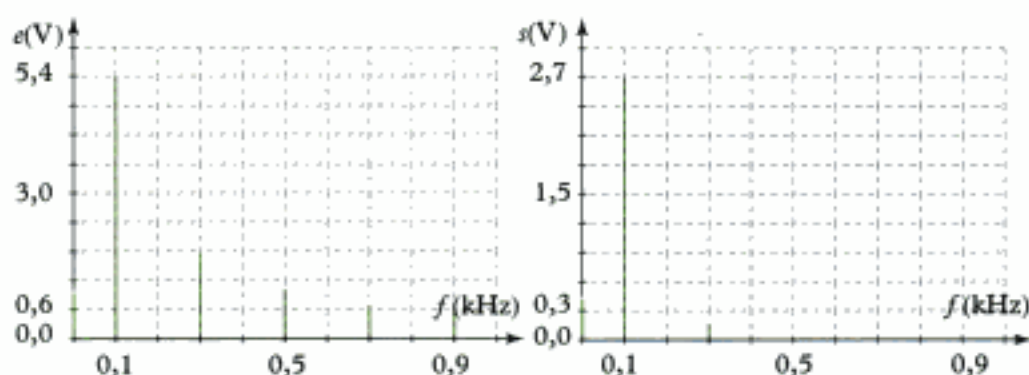


Fig. 12 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Calculons numériquement, d'autre part, la fréquence de coupure f_0 et la fréquence f du signal d'entrée :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = 102 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz}.$$

Nous concluons donc que la fréquence de coupure est très proche de celle du signal d'entrée.

(1) s'explique par le fait que les harmoniques de rang supérieur à 1 sont fortement atténués puisque situés dans la bande coupée dont la pente vaut 40 dB par décade (filtre du deuxième ordre). La représentation suivante illustre schématiquement l'opération de filtrage (fig. 13) :

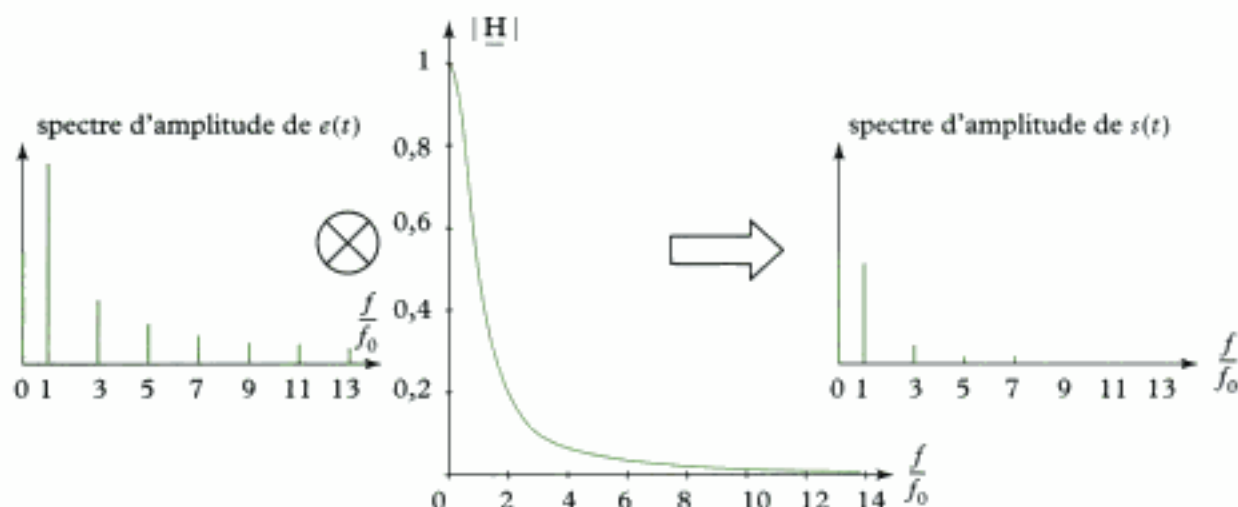


Fig. 13 - Schématisation de l'opération de filtrage sur le spectre d'amplitude du signal d'entrée (le symbole \otimes modélise l'action du filtre sur le spectre de $e(t)$ qui n'est pas une simple multiplication).

1. La distorsion vient des harmoniques de rang supérieur qui bien qu'atténués déforment le signal de sortie qui n'est donc pas tout à fait sinusoïdal.

Le signal est donc quasi-sinusoïdal et proche¹ du fondamental de $e(t)$.

(2) se justifie de même.

Remarque :

La méthode d'analyse spectrale illustrée en figure 13 est pratique. Toutefois, il convient de noter que tout comme le spectre d'amplitude, elle fait abstraction du retard de phase introduit par le filtre sur les harmoniques du signal d'entrée.

Application 2 Décalage temporel

Interpréter le décalage temporel observé en figure 11 entre le fondamental du signal d'entrée et celui du signal de sortie.

Solution

$e(t)$ et $s(t)$ ne sont pas de même nature, aussi, pour raisonner en terme de déphasage, il faut effectivement raisonner sur le fondamental du signal d'entrée. Nous constatons alors que ce dernier est en avance sur le fondamental de $s(t)$ d'un angle voisin de 45° . L'explication est immédiate à partir du diagramme de Bode de l'argument qui montre que pour $f = f_0 = 100$ Hz, le signal de sortie est en retard de 45° sur un signal d'entrée sinusoïdal.

B.3. Conclusion sur le filtrage passe-bas

Résumons l'étude menée sur le filtrage passe-bas.

Effets d'un filtre passe-bas sur un signal appliqué à son entrée :

- la composante continue est transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique² et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal est transmis avec peu de déformation ;
- si la fréquence de ce même signal se rapproche ou dépasse la fréquence de coupure, le signal est déformé³.

2. Nous aurions pu aussi choisir un signal d'entrée triangulaire par exemple.

3. Si la fréquence de $e(t)$ est très élevée devant f_0 , le signal de sortie se réduit alors à la valeur moyenne de $e(t)$, soit à une tension continue si elle existe.

C. Filtre passe-haut actif

C.1. Filtre passe-haut actif du premier ordre

C.1.1 - Fonction de transfert normalisée

Propriété 3

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre, de fréquence de coupure f_C , s'écrit :

$$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_C} = \frac{f}{f_C},$$

H_0 désigne l'amplification dans la bande passante et c'est aussi l'amplification maximale du filtre. ω_C est appelée la pulsation de coupure du filtre.

C.1.2 - Exemple de montage

Considérons le montage donné en figure 14 fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :

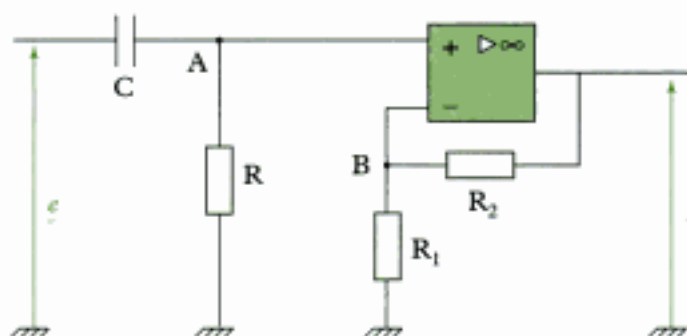


Fig. 14 - Exemple de filtre actif passe-haut du premier ordre.

• Étude en régime sinusoïdal

Établissons la fonction de transfert associée à ce montage alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Appliquons le diviseur de tension :

$$\text{– en A : } \underline{e^+} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e} \quad (1);$$

$$\text{– en B : } \underline{e^-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \underline{s} \quad (2).$$

La combinaison de (1) et (2) conduit ainsi à :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right) \quad (3).$$

L'identification avec la forme normalisée donnée en propriété 3, conduit immédiatement à :

$$\omega_C = \frac{1}{RC}; \quad H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Nous en déduisons l'allure des diagrammes de Bode obtenus en figure 15 par simulations, en prenant les valeurs de composants $R = 4,7 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$.

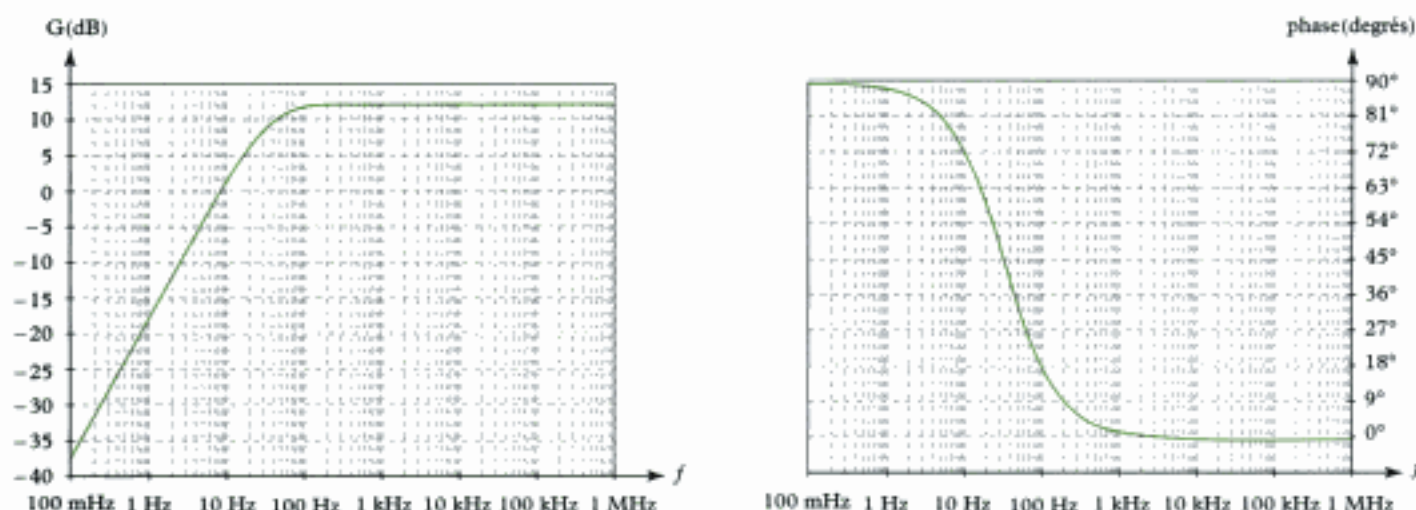


Fig. 15 - Diagrammes de Bode associés au filtre actif passe-haut du premier ordre représenté en figure 14.

1. Le diagramme de Bode du gain montre que l'éventuelle composante continue du signal d'entrée n'est pas transmise en sortie du filtre. Pour cette raison, nous avons choisi un signal d'entrée à valeur moyenne nulle.

• Effets du filtre sur un signal périodique carré

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, de période 1 ms, d'amplitude 0,5 V et sans composante continue¹. La figure 16 donne les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ obtenus par simulation en prenant les mêmes valeurs de composants :

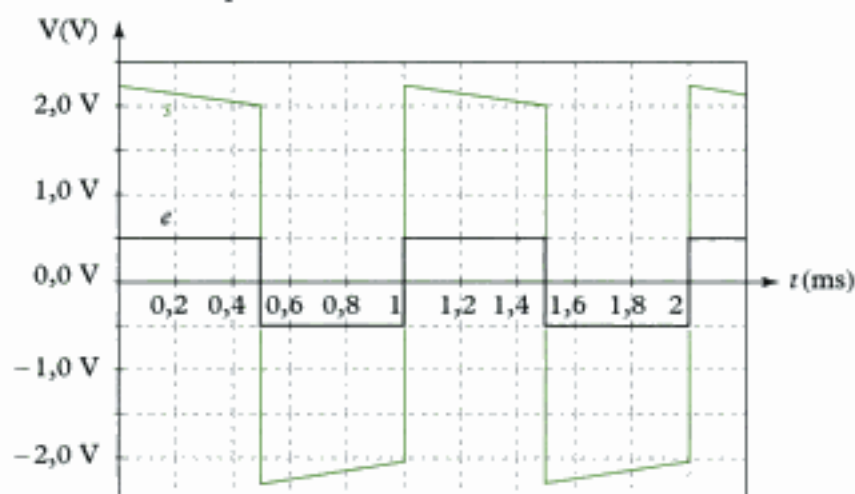


Fig. 16 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) : le signal de sortie est peu déformé par le filtre ;
- (2) : $s(t)$ présente des discontinuités lorsqu'il change de signe ;
- (3) : l'amplitude de $s(t)$ est voisine de 2,2 V soit environ 4,4 fois celle du signal d'entrée ;
- (4) : le signal de sortie est en phase avec le signal d'entrée.

Commençons par calculer la fréquence de coupure de ce filtre :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \approx 34 \text{ Hz},$$

la fréquence f du signal d'entrée :

$$f = \frac{1}{T} = 1 \text{ kHz},$$

et le gain dans la bande passante $H_0 = 1 + 3,3 = 4,3$.

Examinons alors les spectres d'amplitudes des signaux d'entrée et de sortie en figure 17.

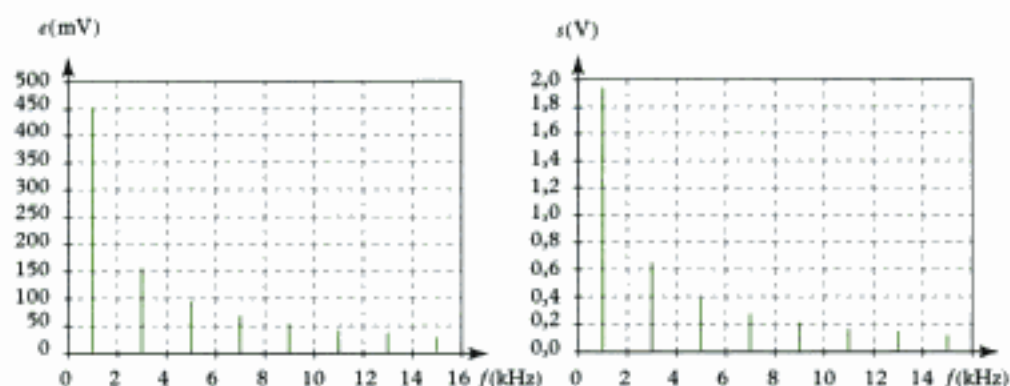


Fig. 17 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

La fréquence de coupure est très inférieure à la fréquence du signal d'entrée et par conséquent tous les harmoniques de ce signal sont transmis par le filtre. En particulier, les discontinuités de $e(t)$ sont présentes également sur le signal de sortie puisqu'elles correspondent à des brusques changements d'états donc à des fréquences élevées nécessairement supérieures à f_C . Tout ceci justifie les observations (1) et (2).

D'autre part, l'amplitude de $s(t)$ est voisine de celle de $e(t)$ multipliée par le gain dans la bande passante H_0 : $0,5 \times 4,3 = 2,15$ V. Ceci permet de comprendre l'observation (3).

Remarque : ces deux interprétations peuvent être obtenues en adaptant au cas du filtre passe-haut la démarche exposée en figure 13.

Enfin, (4) s'interprète aisément à partir du diagramme de Bode de l'argument car pour $f \gg f_C$, le déphasage devient nul : le signal d'entrée et le signal de sortie sont donc en phase.

Application 3 Décalage d'une composante continue

Expliquer brièvement quelle serait l'allure du signal de sortie si le signal d'entrée était simplement décalé d'une composante continue égale à 2 V.

Solution

La composante continue correspond à un signal de fréquence nulle qui n'appartient pas à la bande passante du filtre étudié. Donc cette composante ne serait pas transmise en sortie du filtre et par conséquent le signal de sortie serait identique à celui représenté en figures 16 et 17.

C.1.3 - Caractère dérivateur d'un filtre passe-haut du premier ordre

Les diagrammes de Bode en figure 15 montrent que pour des fréquences très inférieures à f_C , c'est-à-dire au moins 100 fois plus faibles, le filtre se comporte comme un dérivateur puisque dans cette gamme de fréquences :

$$\underline{H} \approx jH_0\omega = \frac{H_0}{\omega_C}j\omega.$$

Il s'agit bien de la fonction de transfert d'un dérivateur telle que nous l'avons présentée au chapitre précédent.

Un filtre présentera un **effet dérivateur** dans une gamme de fréquences si :

- le gain en décibels possède une pente de + 20 dB par décade ;
- le signal de sortie est en quadrature¹ de phase avec le signal d'entrée.

1. Il peut s'agir d'une avance ou d'un retard de phase selon le signe de H_0 .

1. Le logiciel prend en compte la fréquence de coupure f_{AO} et modélise l'amplificateur opérationnel comme un filtre passe-bas d'amplification H_0 en basses fréquences. f_{AO} et H_0 prennent les valeurs typiques données par le constructeur du LM 741.

C.2. Conséquence de la bande passante de l'amplificateur opérationnel réel

Nous allons conserver le même montage qu'en figure 14, avec les mêmes valeurs de composants et le même signal d'entrée. Mais nous tenons compte à présent de la bande passante limitée de l'amplificateur opérationnel comme cela a été précisé au chapitre précédent. Nous présentons ci-après en figures 18, 19, et 20 les simulations réalisées en utilisant des paramètres¹ typiques d'un amplificateur opérationnel de type 741 :

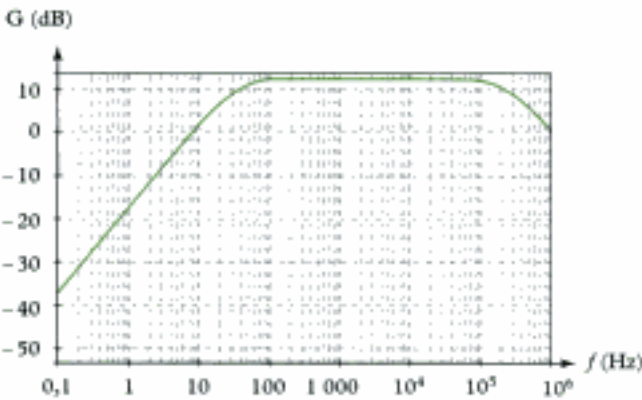


Fig. 18 - Diagramme de Bode associé au filtre actif passe-haut du premier ordre représenté en figure 14, hypothèse d'un A.O. passe-bas du premier ordre.

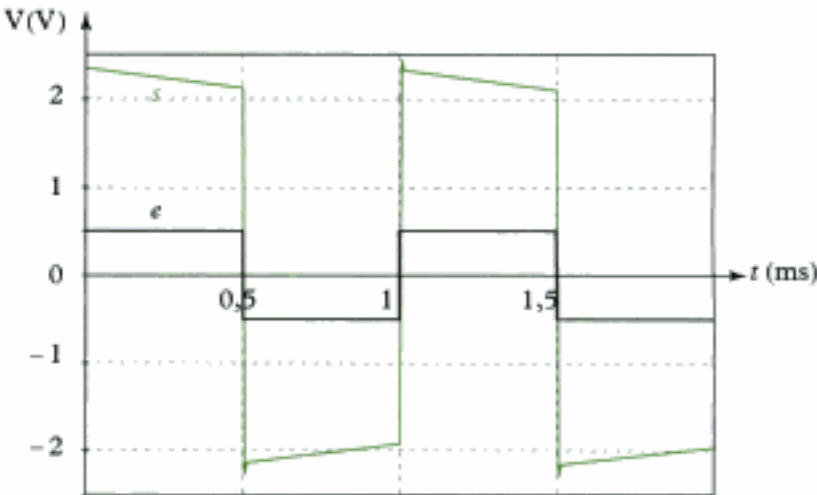


Fig. 19 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

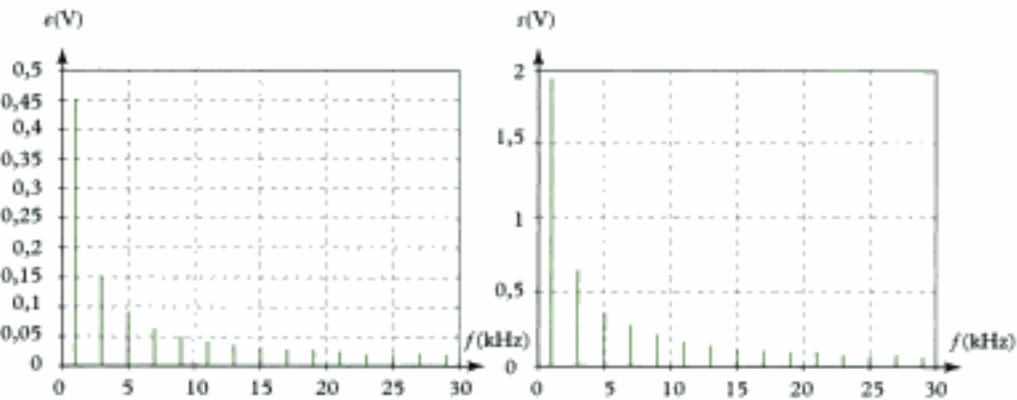


Fig. 20 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

- (1) : le diagramme de Bode représenté en figure 18 est celui d'un filtre de type passe-bande, dont la fréquence de coupure haute f_{CH} est voisine de 287 kHz ;
- (2) : les évolutions temporelles et les spectres d'amplitudes sont identiques à ceux présentés dans le cas où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

Interprétations :

- (1) La fréquence de coupure haute s'interprète en prenant en compte le caractère passe-bas de l'amplificateur opérationnel. On peut en effet vérifier que c'est lui qui est à l'origine de cette coupure en évaluant le facteur de mérite, la bande passante de l'A.O. étant ici égale à f_{CH} soit 287 kHz. L'amplification dans la bande passante H_0 est égale à 4,3 et on a donc $H_0 \times f_{CH} \approx 1,23$ MHz. Cette valeur est à rapprocher de la valeur standard donnée par le constructeur du 741 voisine de 1,6 MHz comme nous l'avons dit au chapitre précédent.
- (2) Puisque les harmoniques significatifs du signal d'entrée ont une fréquence bien inférieure à f_{CH} , le caractère passe-bas de l'amplificateur ne modifie pas dans ce cas l'effet du filtrage.

Remarque : les interprétations peuvent être retrouvées en utilisant le diagramme réel du gain et en raisonnant comme en figure 13.

C.3. Conclusion sur le filtrage passe-haut

- Nous pouvons proposer les principaux effets de cette opération de filtrage qui sera en outre reprise dans les exercices et dont certains effets seront admis provisoirement.

1. Conformément au programme, nous excluons de notre bilan les signaux produits par des circuits non linéaires et dont l'analyse spectrale est plus délicate.

2. Voir correction de l'application 4 paragraphe D.2 question a).

3. Il est impossible de proposer ici un critère quantitatif puisque la valeur de f_{CH} dépend de H_0 .

4. Cette limitation est aussi valable pour d'autres composants tel le transistor. Il en est de même pour un circuit passif dont les composants en hautes fréquences voient leur propriétés se modifier.

Effets d'un filtre passe-haut sur un signal¹ appliqué à son entrée :

- la composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal de sortie est d'amplitude très faible et seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à une amplitude du signal de sortie significative² ;
- si le signal d'entrée est non sinusoïdal et de fréquence proche de la fréquence de coupure, le signal est très déformé.

• Cas des filtres actifs avec amplificateur opérationnel réel

Pour des signaux de fréquence faible devant f_{CH} ³, le comportement passe-bas de l'amplificateur opérationnel ne modifie pas ces conclusions. Toutefois, l'étude menée au paragraphe C.2 fait clairement apparaître que le filtre passe-haut actif⁴ n'existe pas ! Il s'agit en réalité d'un filtre passe-bande.

Remarque : le comportement passe-bas de l'A.O. peut évidemment perturber le rôle premier de tout filtre : passe-bas, passe-bande, ...

C.4. Fonction de transfert normalisée d'un filtre passe-haut du deuxième ordre

Nous donnons uniquement dans ce paragraphe la fonction de transfert normalisée de ce type de filtre afin de permettre son identification après calcul de sa fonction de transfert. Les conclusions données en paragraphe C. 3 sont inchangées.

Propriété 4

La fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du deuxième ordre** s'écrit :

$$\underline{H} = H_0 \frac{(jx)^2}{1 + \frac{1}{Q}jx + (jx)^2}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

ω_0 est appelée la *pulsation propre* du filtre (exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Q désigne le *facteur de qualité*.

Il est aussi possible de normaliser la fonction de transfert en introduisant le *facteur d'amortissement* m défini par :

$$m = \frac{1}{2Q}$$

La fonction de transfert se réécrit alors selon :

$$\underline{H} = H_0 \frac{(jx)^2}{1 + 2mjx + (jx)^2}$$

D. Filtre passe-bande actif

D.1. Fonction de transfert normalisée

Propriété 5

La fonction de transfert d'un **filtre passe-bande du deuxième ordre** s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}.$$

ω_0 est appelée la *pulsation propre* du filtre (exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Q représente le *facteur de qualité* du filtre, il est sans unité. Plus Q est élevé et plus le filtre est sélectif. f_0 est appelée la *fréquence propre* ou *fréquence centrale* du filtre passe-bande.

Pour $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, on a $x = 1$. Le dénominateur de la fonction de transfert est minimal et vaut 1, donc $\underline{H} = H_0$.

Il est aussi possible de normaliser la fonction de transfert en introduisant le *facteur d'amortissement*¹ m défini par :

$$m = \frac{1}{2Q}$$

La fonction de transfert se réécrit alors selon :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{1}{2m}\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

¹ Ce paramètre est plus informatif dans le domaine temporel et notamment lorsqu'il s'agit d'étudier une réponse transitoire comme en théorie des asservissements. Citons également son utilisation dans la courbe de gain d'un système passe-bas du deuxième ordre.

Rappelons qu'un paramètre essentiel caractérisant ce type de filtre est sa *largeur de bande passante* Δf définie comme l'intervalle de fréquences délimité par les fréquences de coupure haute et basse. Nous redonnons le résultat établi dans le cours de première année¹ :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

Nous vérifions ainsi que plus Q est élevé, plus la largeur de bande passante est étroite et plus le filtre est sélectif.

Remarque : il est possible d'écrire également la fonction de transfert sous la forme équivalente suivante :

$$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

D.2. Exemple de montage

D.2.1 - Étude en régime sinusoïdal

Considérons le montage donné en figure 21 fonctionnant en régime sinusoïdal permanent où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal :

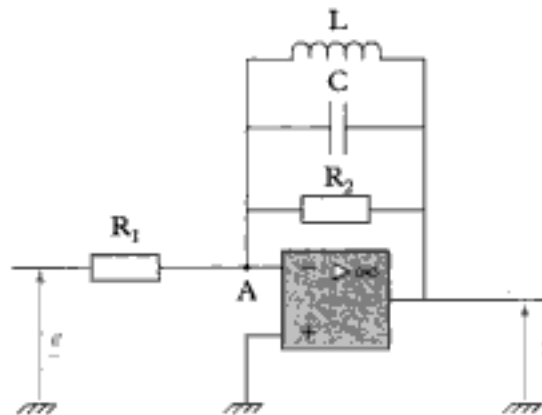


Fig. 21 - Exemple de filtre actif passe-bande du deuxième ordre.

Établissons l'expression de la fonction de transfert associée à ce filtre alimenté en régime sinusoïdal à la pulsation ω . Appliquons le théorème de Millman en A sachant que $e^+ = e^- = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{e}{R_1} + \frac{s}{jL\omega} + \frac{s}{R_2} + jC\omega s &= 0 \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{1}{R_1} \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega}} \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} \end{aligned}$$

L'identification avec la forme normalisée donnée en propriété 5, conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} R_2 C = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{R_2}{L} = Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = R_2 \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

Nous en déduisons l'allure des diagrammes de Bode représentés en figure 22 en prenant les valeurs de composants : $L = 22 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$.

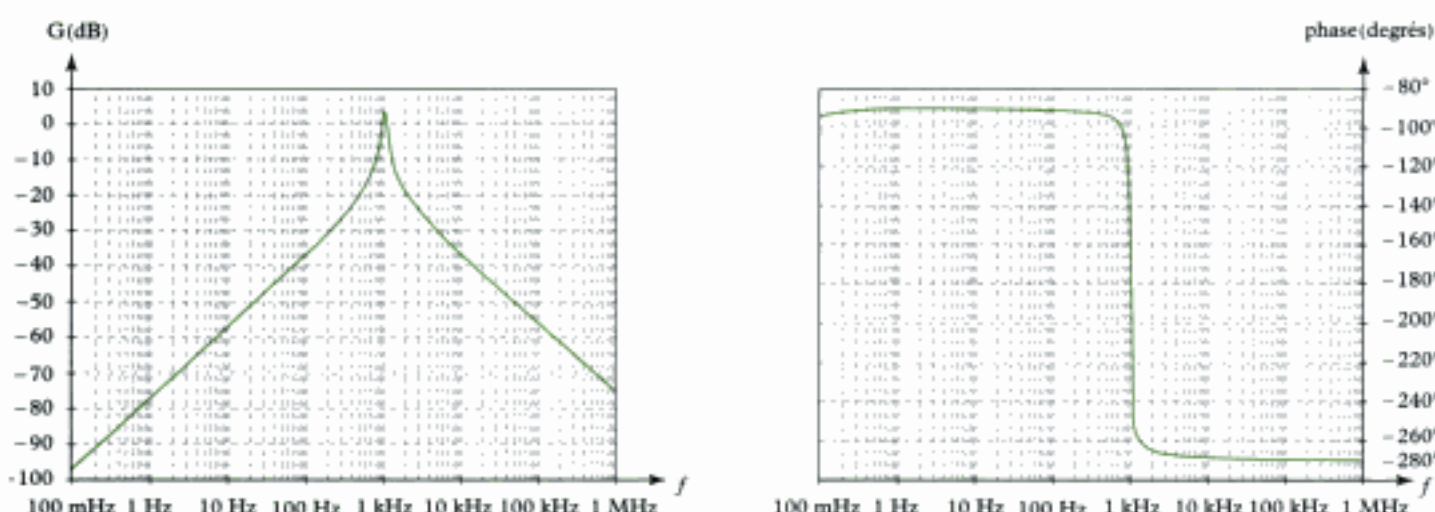


Fig. 22 - Diagrammes de Bode associés au filtre actif passe-bande du deuxième ordre représenté en figure 21.

1. Cette valeur est obtenue par lecture sur le diagramme : on cherche l'intervalle de fréquence pour lequel le gain est supérieur ou égal au gain maximum -3 dB .

Notons dès à présent que le filtre est ici sélectif puisque sa bande passante est étroite (environ 100 Hz^1 pour $f_0 = 1 \text{ kHz}$). Pour confirmer cette observation, calculons numériquement le coefficient de qualité :

$$Q = R_2 \sqrt{\frac{C}{L}} = 1,5 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{10^{-6}}{22 \cdot 10^{-3}}} = 10,1.$$

Cette valeur est effectivement élevée devant l'unité (rapport de 10). Déterminons également la fréquence propre de ce filtre :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 1,07 \text{ kHz}.$$

D.2.2 - Effets du filtre sur un signal périodique carré de fréquence 50 Hz

Envisageons à présent le cas d'un signal d'entrée $e(t)$ carré, d'amplitude 5 V avec une composante continue positive égale à 2 V. Les valeurs des composants étant conservées, nous donnons en figure 23 les chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ et les spectres d'amplitudes en figure 24 :

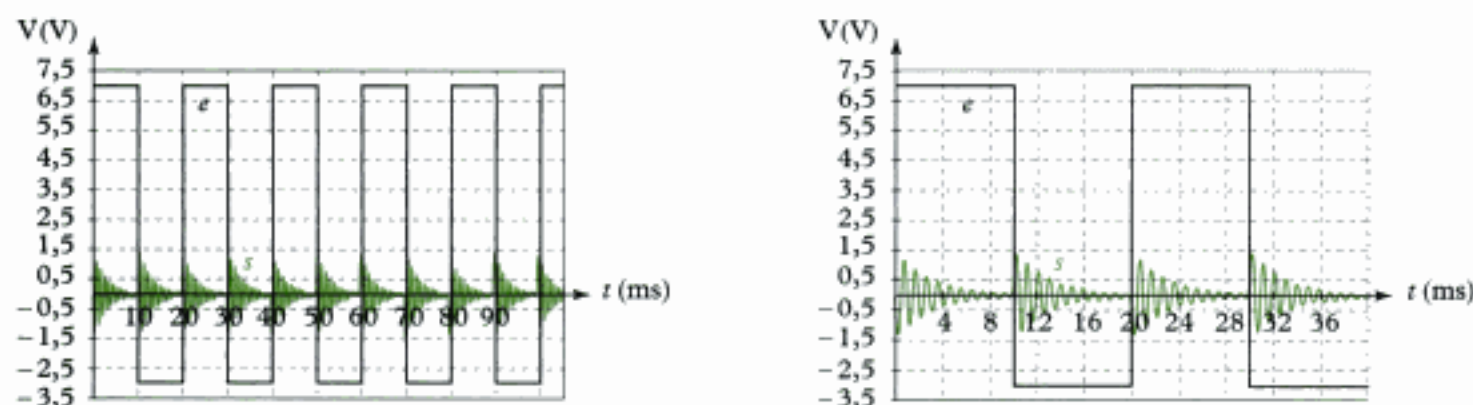


Fig. 23 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

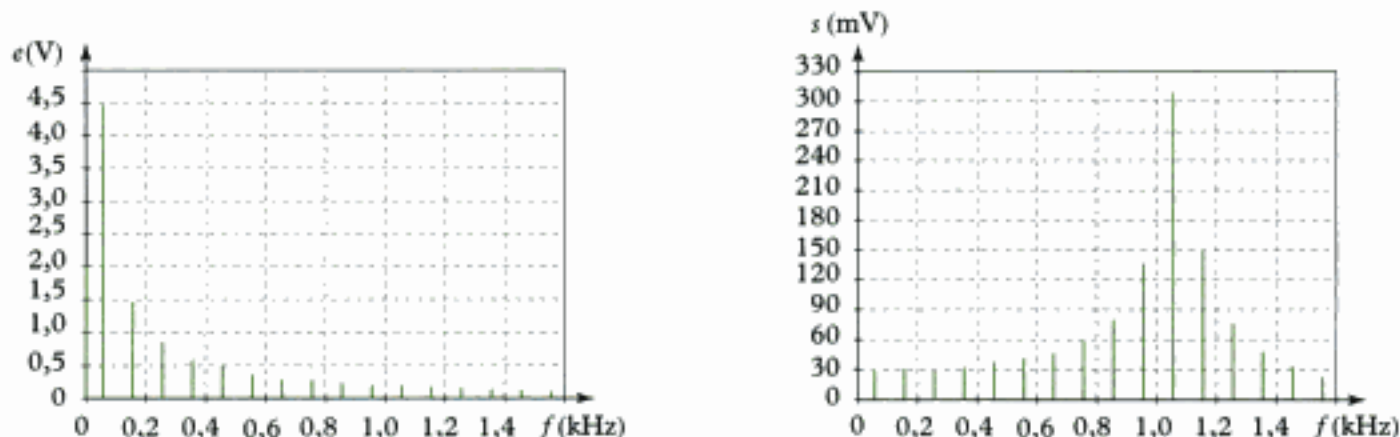


Fig. 24 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Observations :

Le signal de sortie présente des oscillations amorties avec une pseudo-période voisine de 1ms ; dans le spectre d'amplitude de ce signal, seule l'harmonique de fréquence proche de f_0 est significative et il n'y a pas de composante continue.

Interprétations :

Le signal $s(t)$ n'est pas transmis correctement par le filtre. En effet, seuls les harmoniques de $e(t)$ contenus dans la bande passante sont transmis en sortie du filtre. La valeur de la pseudo-période¹ est à rapprocher de la valeur de la fréquence f_0 qui est égale à 1,07 kHz. La composante continue du signal d'entrée est dans la bande coupée, donc non transmise.

Remarque :

Il peut sembler surprenant au premier abord de ne pas observer un caractère dérivateur pour ce filtre puisque la fréquence fondamentale du signal d'entrée est très inférieure à la fréquence f_0 . Pour expliquer ce point, représentons l'action réalisée par le filtre sur le spectre d'amplitude de $e(t)$ (fig. 25).

1. Dans le domaine temporel, on peut dire que $s(t)$ est la réponse d'un circuit R_2LC soumis à des échelons de tension de période $T = 20$ ms et semblable au cas d'un régime pseudo-périodique.

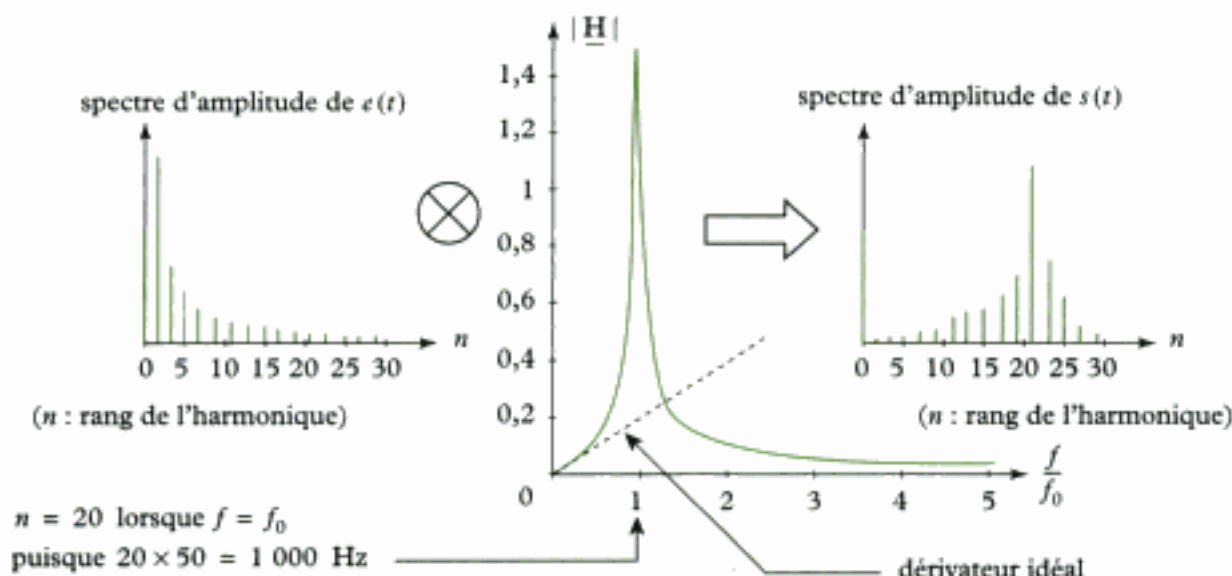


Fig. 25 - Schématisation de l'opération de filtrage sur le spectre d'amplitude du signal d'entrée.

Nous observons à nouveau que les harmoniques de rang voisin de 20 ne sont pas d'amplitude négligeable pour le signal de sortie. Or le caractère dérivateur du filtre se manifestant dans la bande coupée des basses fréquences (c'est-à-dire pour $f \ll f_0$) ; ces harmoniques ne subissent pas l'effet dérivateur du filtre. À titre de comparaison², nous avons représenté en traits pointillés le diagramme du gain du dérivateur idéal en figure 25.

2. À titre comparatif toujours, si on diminue la sélectivité du filtre passe-bande, on observe que le caractère dérivateur est d'autant meilleur que la sélectivité est moindre.

D.2.3 - Effets du filtre sur un signal périodique carré de fréquence 1 kHz

Seule la fréquence de $e(t)$ a été modifiée par rapport au cas précédent. Les nouveaux chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ sont donnés en figure 26, les spectres d'amplitudes en figure 27 :

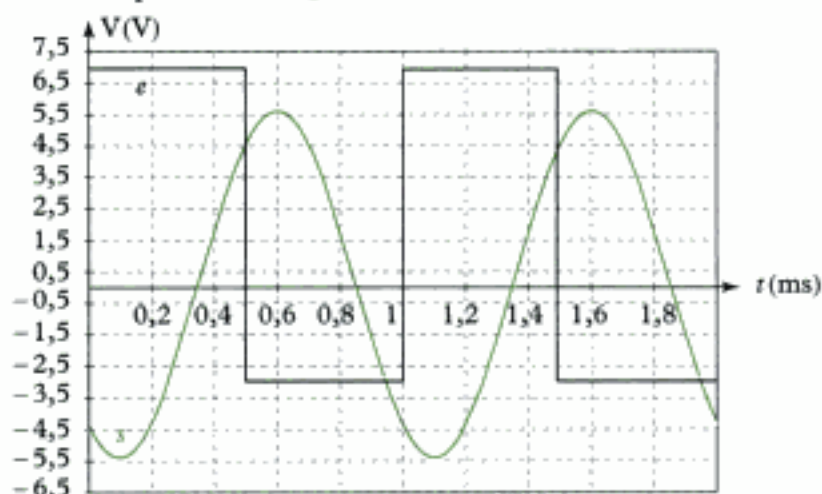


Fig. 26 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

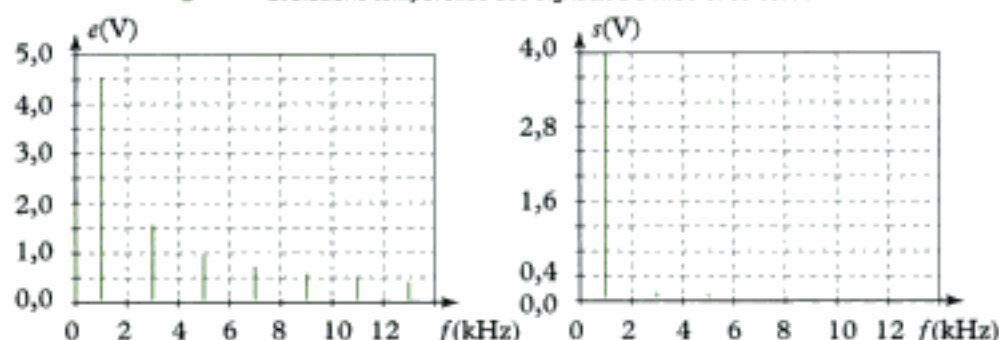


Fig. 27 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Nous pouvons faire les observations suivantes :

(2) pour une fréquence égale à 1 kHz et donc proche de f_0 , le signal est quasi-sinusoïdal, de fréquence voisine de f_0 , sans composante continue.

D.2.4 - Effets du filtre sur un signal périodique carré de fréquence 10 kHz

Seule la fréquence de $e(t)$ a été à nouveau modifiée. Les nouveaux chronogrammes des tensions $e(t)$ et $s(t)$ sont donnés en figure 28, les spectres d'amplitudes en figure 29 :

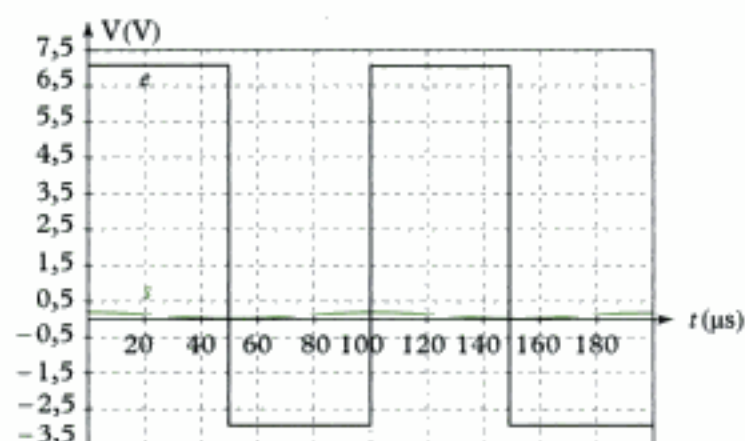


Fig. 28 - Évolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie.

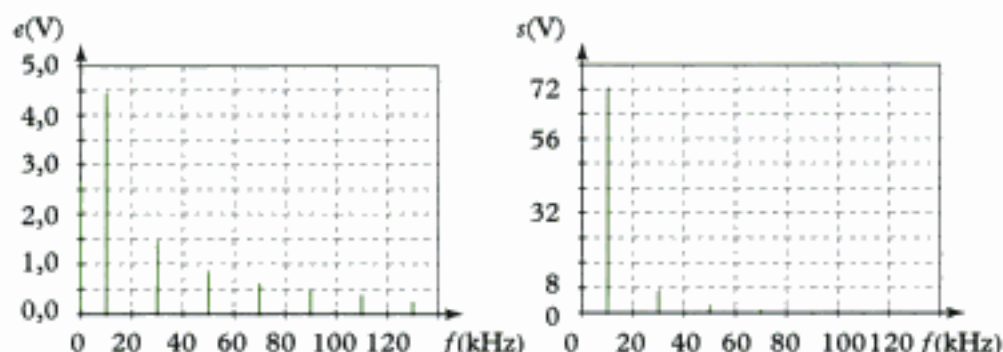


Fig. 29 - Spectres d'amplitudes de $e(t)$ et de $s(t)$.

Observations :

En hautes fréquences, le signal de sortie est d'amplitude très faible et sans composante continue. Il est en outre d'allure triangulaire.

Interprétations :

Le fondamental de $e(t)$, l'harmonique le plus proche de f_0 , est situé dans la bande coupée des hautes fréquences ($f \gg f_0$), aussi tous les harmoniques du signal d'entrée sont fortement atténués. Le signal de sortie est donc très atténué. L'effet intégrateur dû au filtre dans cette bande de fréquences est responsable de l'allure du signal de sortie qui conduit à un signal triangulaire si le signal d'entrée est carré.

Remarque : ces conclusions se retrouvent simplement à partir de la figure 25 en sachant qu'ici $n = 1$ correspond au rapport $\frac{f}{f_0} \approx 10$.

Application 4 Réponse d'un filtre passe-bande

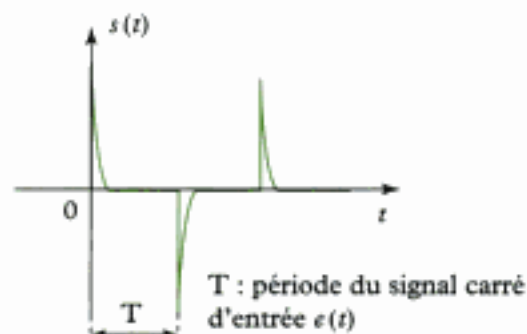
Anticiper l'allure de la réponse d'un filtre passe-bande réalisé par le même montage, mais dont les valeurs de composants conduisent à un coefficient de qualité voisin de 0,1 pour un signal d'entrée carré dont l'ensemble des harmoniques significatifs :

- a) est situé dans la bande coupée du filtre en basses fréquences ;
- b) sont de fréquence voisine de la fréquence propre du filtre ;
- c) est situé dans la bande coupée du filtre en hautes fréquences.

Solution

La différence par rapport au cas étudié précédemment se situe dans la valeur de Q : ici le filtre est peu sélectif (car $Q \ll 1$). Nous déduisons alors par comparaison avec l'étude précédente que :

a) Les premiers harmoniques de $e(t)$ n'étant pas situés dans la bande passante, ils sont atténués (figure 25) tandis que les harmoniques de rang voisin de 20 sont mieux transmis. La bande passante étant plus large qu'au paragraphe D.2.2, la réponse temporelle n'est plus pseudo-périodique car le filtre ne favorise pas une seule composante du spectre de $e(t)$. L'étude spectrale peut ensuite être complétée par le calcul de m ici égal à 5 : le régime transitoire est donc apériodique et très amorti. Ce qui conduit à l'allure ci-contre pour le signal en sortie du filtre :



- b) Le signal de sortie n'est pas sinusoïdal comme dans le cas $Q = 10$ et contient plusieurs harmoniques. Plus la bande passante sera large et plus le signal de sortie se rapprochera d'un signal d'allure carrée, toujours sans composante continue.
- c) Ici, il n'y a aucune différence à noter par rapport au cas du filtre de facteur de qualité voisin de 10.

D.3. Conclusion sur le filtrage passe-bande

L'étude menée dans ce paragraphe peut se résumer comme suit :

1. Conformément au programme, nous excluons de notre bilan les signaux produits par des circuits non linéaires et dont l'analyse spectrale est plus délicate.

2. Revoir la question b) de l'application 4.

3. Ce cas est identique à celui du filtre passe-bas.

Effets d'un filtre passe-bande sur un signal¹ appliqué à son entrée :

- la composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique, non sinusoïdal et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, la réponse temporelle dépend de la valeur du facteur de qualité. En bande étroite, il ne transmet que les harmoniques de fréquence proche de la fréquence propre du filtre. En bande large, seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à un signal en sortie ;
- si la fréquence de ce signal se rapproche de la fréquence propre du filtre, le signal transmis peut avoir des formes très différentes là encore selon la largeur de bande. En bande étroite, le signal de sortie est presque sinusoïdal, sinon il est voisin de la composante alternative² du signal d'entrée ;
- si la fréquence de ce signal est très supérieure à la fréquence propre du filtre, le signal de sortie est de faible amplitude.³

D.4. Caractères dérivateur et intégrateur d'un filtre passe-bande du second ordre

À la lecture des diagrammes de Bode de la figure 22, nous constatons que dans le domaine des basses fréquences (soit $f \leq \frac{f_0}{10}$) le filtre passe-bande présente un caractère dérivateur et un caractère intégrateur dans le domaine des hautes fréquences ($f \geq 10f_0$).

Nous avons vu qu'en pratique le filtre doit être peu sélectif pour que l'effet dérivateur soit efficace. De plus, la fréquence f du fondamental du signal d'entrée doit être nettement inférieure à f_0 (il est souhaitable de s'imposer $f \leq \frac{f_0}{100}$ à cause de l'éventuelle sélectivité du filtre).

Pour que l'effet intégrateur soit efficace, il faut que f soit grande devant la fréquence propre du filtre (en pratique $f \geq 10f_0$).

E. Filtre coupe-bande

Nous donnons uniquement dans ce paragraphe la fonction de transfert normalisée de ce type de filtre afin de permettre son identification après calcul de sa fonction de transfert.

Propriété 6

La fonction de transfert d'un filtre coupe-bande du deuxième ordre s'écrit :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + (jx)^2}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = H_0 \frac{1 + (jx)^2}{1 + 2mjx + (jx)^2}, \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

F. Conclusion du chapitre

L'ensemble de ce chapitre montre qu'il est nécessaire de se servir à la fois de la représentation temporelle et de la représentation fréquentielle afin de prévoir ou analyser le comportement du filtre sur les signaux appliqués à son entrée. Ajoutons même que ceci est vrai pour le système électronique puisque dans les chapitres précédents il nous est arrivé d'analyser des systèmes dans le domaine temporel (équation différentielle du système) ou dans le domaine fréquentiel (fonction de transfert). En définitive :

Un signal ou un système possèdent une représentation dans l'espace des temps et une représentation dans l'espace des fréquences.

L'essentiel

✓ Types de filtre

Connaître les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande.

✓ Fonctions de transferts et diagrammes de Bode des filtres élémentaires

Nature du filtre	Fonction de transfert	Diagramme de Bode du gain	Diagramme de Bode de l'argument
Passe-bas du 1 ^{er} ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx} = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_C}}$ f_C : fréquence de coupure ; H_0 : gain dans la bande passante.		
Passe-bas du 2 ^e ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ $= \frac{H_0}{1 - x^2 + j2mx}$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2m}$ $x = \frac{f}{f_0}$ Q : facteur de qualité ; f_0 : fréquence propre ; m : facteur d'amortissement.		
Passe-haut du 1 ^{er} ordre	$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$ $= H_0 \frac{j\frac{f}{f_C}}{1 + j\frac{f}{f_C}}$		
Passe-haut du 2 ^e ordre	$\underline{H} = H_0 \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ $= H_0 \frac{-x^2}{1 - x^2 + j2mx}$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2m}$ $x = \frac{f}{f_0}$		

Passe- bande du 2 ^e ordre	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2m}$ $x = \frac{f}{f_0}$		
Coupe- bande du 2 ^e ordre	$\underline{H} = H_0 \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{1}{Q}x}$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2m}$ $x = \frac{f}{f_0}$		

Remarque : les courbes de l'argument peuvent être décalées en ordonnées de π selon le signe de H_0 .

✓ Effets du filtrage passe-bas sur la composition spectrale d'un signal périodique

Effets d'un filtre passe-bas sur un signal appliqué à son entrée :

- la composante continue est transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal est transmis avec peu de déformation ;
- si la fréquence d'un signal non sinusoïdal se rapproche ou dépasse la fréquence de coupure, le signal est déformé.

✓ Effets du filtrage passe-haut sur la composition spectrale d'un signal périodique

Effets d'un filtre passe-haut sur un signal appliqué à son entrée :

- la composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, le signal de sortie est d'amplitude très faible et seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à une amplitude du signal de sortie significative ;
- si la fréquence du signal est proche de la fréquence de coupure, le signal est très déformé s'il est non sinusoïdal et atténué s'il est sinusoïdal.

✓ Effets du filtrage passe-bande sur la composition spectrale d'un signal périodique

Effets d'un filtre passe-bande sur un signal appliqué à son entrée :

- la composante continue n'est pas transmise de l'entrée vers la sortie du filtre ;
- si le signal d'entrée est périodique, non sinusoïdal et de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure, la réponse temporelle dépend de la valeur du facteur de qualité. En bande étroite, il ne transmet que les harmoniques de fréquence proche de la fréquence propre du filtre. En bande large, seules les éventuelles discontinuités du signal d'entrée donnent lieu à un signal en sortie ;
- si la fréquence de ce signal se rapproche de la fréquence propre du filtre, le signal transmis peut avoir des formes très différentes là encore selon la largeur de bande. En bande étroite, le signal de sortie est presque sinusoïdal, sinon il est voisin de la composante alternative du signal d'entrée ;
- si la fréquence de ce signal est très supérieure à la fréquence propre du filtre, le signal de sortie est de faible amplitude.

✓ **Caractère intégrateur d'un filtre passe-bas du premier ordre**

Un filtre présentera un effet intégrateur dans une gamme de fréquences si le gain en décibels possède une pente de -20 dB par décade et si le signal de sortie est en quadrature de phase avec le signal d'entrée.

✓ **Caractère dérivateur d'un filtre passe-haut du premier ordre**

Un filtre présentera un effet dérivateur dans une gamme de fréquences si le gain en décibels possède une pente de $+20$ dB par décade et si le signal de sortie est en quadrature de phase avec le signal d'entrée.

✓ **Hypothèse d'un amplificateur opérationnel passe-bas du premier ordre**

Le comportement passe-bas du premier ordre de l'amplificateur opérationnel peut perturber le rôle premier de tout filtre à amplificateur opérationnel. En particulier, il ne peut exister de filtre réel passe-haut à amplificateur opérationnel.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment déterminer la fonction de transfert d'un système possédant plusieurs boucles de liaison entre la sortie et l'entrée inverseuse d'un A.O. ?

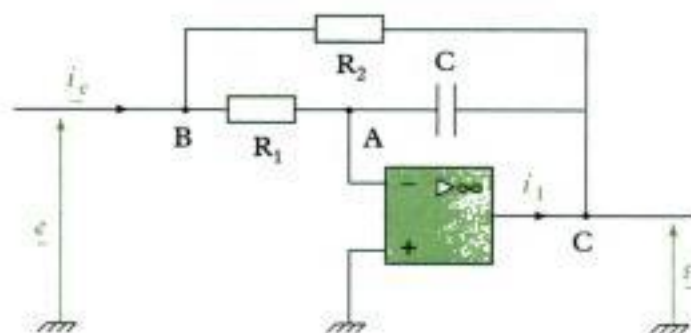
On se propose de déterminer la fonction de transfert d'un filtre actif qui comporte plusieurs boucles de liaison entre l'entrée inverseuse d'un A.O. et la sortie de celui-ci.

→ Savoir faire

- 1 Repérer les nœuds du circuit électrique où il est possible d'appliquer le théorème de Millman ou le diviseur de tension qui sont deux outils de l'électrocinétique à privilégier. Il faut éviter d'introduire les courants afin d'alléger le calcul. Attention : il est impossible d'utiliser le théorème de Millman en sortie de l'A.O. (car celui-ci débite un courant qui n'est jamais connu dans les exercices).
- 2 Appliquer le théorème de Millman et/ou le diviseur de tension autant de fois que nécessaire. Utiliser les propriétés de l'A.O. idéal sauf mention contraire de l'énoncé.
- 3 Résoudre le système d'équations et en extraire la fonction de transfert.

→ Application

Établir en régime sinusoïdal de pulsation ω l'expression de la transmittance du montage suivant comportant un A.O. idéal :



Solution

- On peut appliquer le théorème de Millman au nœud A sachant que le courant i^- absorbé par l'entrée inverseuse de l'A.O. idéal est nul.
On ne peut pas appliquer le théorème de Millman au point C car i_s n'est jamais connu.
- On applique le théorème de Millman au nœud A :

$$\underline{V_A} = \frac{jC\omega \underline{s} + \frac{\underline{e}}{R_1}}{jC\omega + \frac{1}{R_1}} \quad (1)$$

$$\text{Avec ici } \underline{V_A} = \underline{e}^+ \text{ et } \underline{e}^- = \underline{e}^+ = 0 \text{ (A.O. idéal)} \Rightarrow \underline{V_A} = 0. \quad (2)$$

- Les équations (1) et (2) conduisent à :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{1}{jR_1 C\omega} \text{ (montage intégrateur).}$$

Méthode n° 2

Comment utiliser la représentation d'un signal périodique à l'entrée d'un filtre dans l'espace des fréquences ?

On souhaite analyser le signal de sortie d'un circuit de filtrage en raisonnant sur la représentation spectrale du signal d'entrée et sur la fonction de transfert du filtre. On peut aussi parfois prédire la forme du signal de sortie.

→ Savoir faire

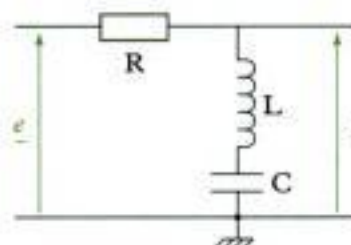
- Commencer par faire l'étude du système également dans l'espace des fréquences. Pour un filtre, on détermine donc sa fonction de transfert ce qui permet dans un premier temps de l'identifier. Puis on trace les diagrammes de Bode. En pratique, le diagramme de Bode asymptotique du gain peut suffire. On trace le diagramme réel du gain si des résultats quantitatifs sont attendus.
- Superposer le spectre du signal d'entrée périodique au diagramme de Bode du gain (revoir également les figures 13 et 25 du cours). Soit ce spectre est fourni dans l'énoncé soit il est introduit grâce à la donnée de la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée. Seuls les harmoniques situés dans la bande passante du filtre contribuent à l'élaboration du signal de sortie. Identifier si le spectre donne les amplitudes ou les valeurs efficaces des harmoniques (rappel : dans cet ouvrage, on donne les valeurs efficaces des harmoniques).
- Interpréter ou prévoir l'action du filtre sur le signal d'entrée. Les harmoniques situés dans la bande passante se retrouvent dans le spectre du signal de sortie et permettent de justifier l'allure de ce signal dans l'espace des temps.

→ Application

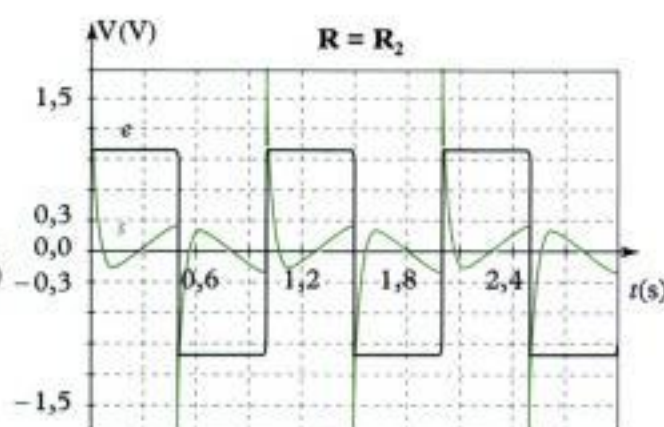
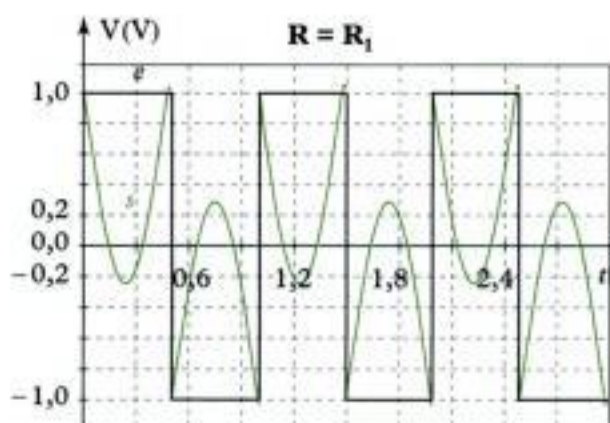
On considère le filtre ci-contre :

On donne ci-après les réponses temporelles $s(t)$ obtenues pour R_1 et R_2 , le signal d'entrée $e(t)$ étant carré, d'amplitude 1 V, impair, de valeur moyenne nulle et de fréquence :

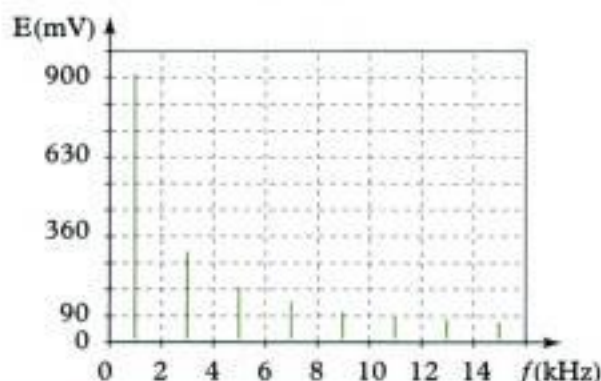
$$f = 1 \text{ kHz.}$$



$$\begin{aligned} R &= R_1 = 3 \, \Omega \\ \text{ou } R &= R_2 = 160 \, \Omega \\ L &= 5 \text{ mH} \\ C &= 5 \, \mu\text{F} \end{aligned}$$



On donne également le spectre en amplitude et la série de Fourier associée à $e(t)$:



$$e(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega t]}{2k+1}$$

avec $\omega = 2\pi f$ et $f = 1 \text{ kHz}$.

Commenter qualitativement les résultats obtenus en sortie du filtre pour les deux valeurs de la résistance R .

Solution

➊ À l'aide du diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} \underline{e} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} \underline{e},$$

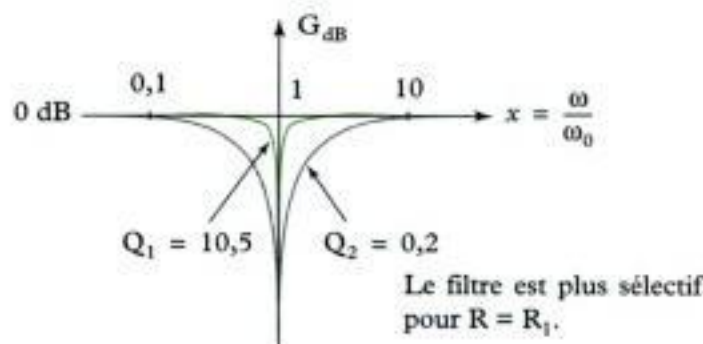
posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\frac{1}{Q\omega_0} = RC \Rightarrow Q = RC\omega_0 = \frac{L\omega_0}{R}$. Ainsi, il vient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Il s'agit d'un filtre coupe-bande dont l'allure du diagramme de Bode dépend de la valeur du facteur de qualité Q . Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on trouve :

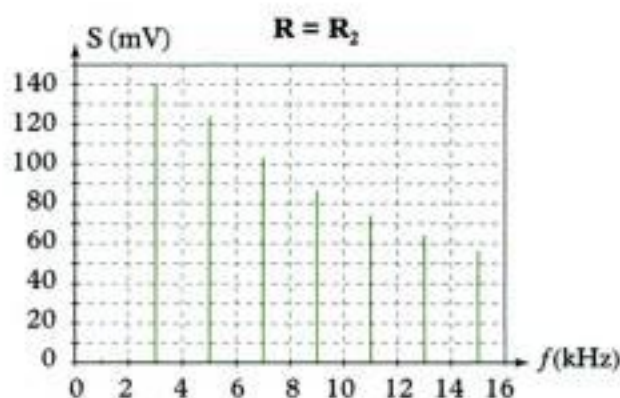
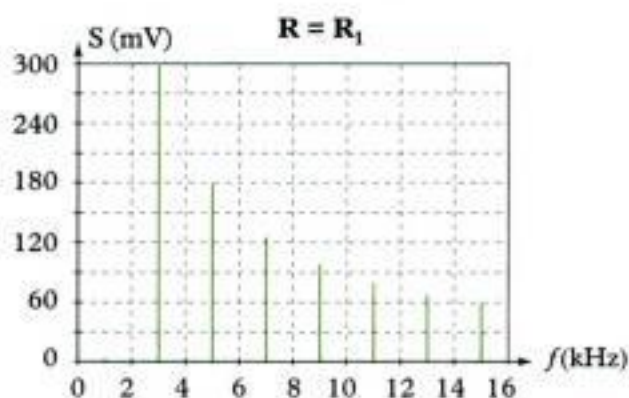
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1 \text{ kHz} ; Q_1 = 10,5 \text{ pour } R_1 = 3 \Omega \text{ et } Q_2 \approx 0,2 \text{ pour } R_2 = 160 \Omega.$$

D'où l'allure du diagramme de Bode du gain :



- Pour $R = R_1$: seul le fondamental de $e(t)$ est situé dans la bande coupée, les autres harmoniques étant très peu atténués.
- Pour $R = R_2$: les premiers harmoniques sont atténués par le filtre et pas seulement le fondamental car la bande coupée est plus large dans ce cas. Les harmoniques de fréquence suffisamment élevée sont au contraire transmis en sortie du filtre.
- Pour $R = R_1$: le signal de sortie $s(t)$ correspond, à peu de choses près, au signal $e(t)$ privé de son fondamental $e_1(t)$ soit $s(t) = e(t) - e_1(t)$. Cette observation est très nette dans le domaine temporel.
- Pour $R = R_2$: les harmoniques de haute fréquence sont bien transmis en sortie du filtre ce qui se traduit par des pics de tension aux moments où $e(t)$ change d'état.

Pour compléter cette interprétation, nous donnons ci-dessous les spectres des signaux de sortie pour les deux valeurs de R qui précisent les conclusions précédentes :



Nous vérifions en particulier que :

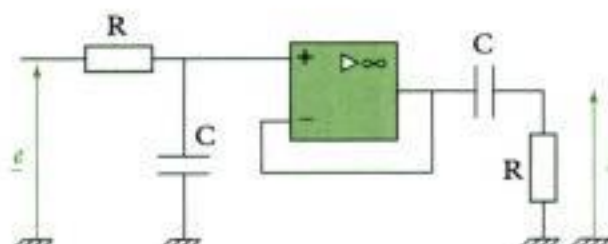
- pour $R = R_1$, les amplitudes des harmoniques du signal de sortie de rang supérieur à 1 sont égales à celles des harmoniques de même rang du signal d'entrée ;
- pour $R = R_2$, les premiers harmoniques, de rang supérieur à 1, sont plus atténués que dans le cas où $R = R_1$.

Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Utilisation d'un A.O. suiveur

Dans le circuit ci-dessous, quel est le rôle de l'amplificateur opérationnel ?



Donner la fonction de transfert du filtre et les diagrammes de Bode.

Oral, Mines-Ponts, MP, 2003.

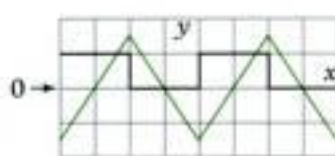
Ex. 2 Détermination expérimentale des paramètres d'un filtre passe-bande

Pour un filtre passe-bande, la fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

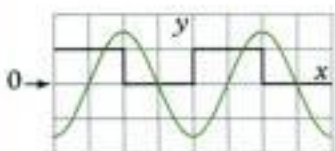
Déterminer H_0 , Q et ω_0 à l'aide des deux expériences décrites ci-dessous.

Expérience 1 : le signal d'entrée est carré



x : 1 carreau = 1 ms ;
 y : 1 carreau = 0,1 V
 pour le signal d'entrée
 et 20 mV pour le signal de sortie

Expérience 2 : le signal d'entrée est carré



x : 1 carreau = 10 ms ;
 y : 1 carreau = 0,1 V
 pour le signal d'entrée
 et 2 V pour le signal de sortie

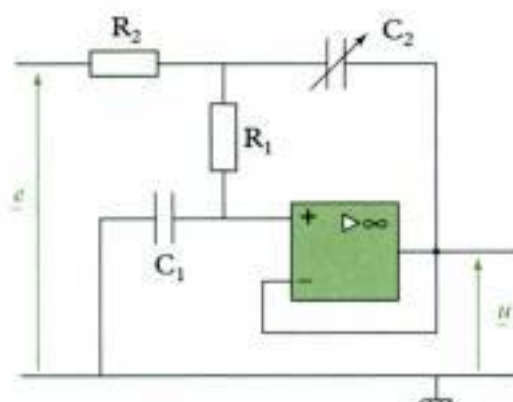
Dans l'expérience 2, si on augmente légèrement la fréquence du signal d'entrée, l'amplitude du signal de sortie diminue ; si on diminue légèrement cette fréquence, l'amplitude diminue aussi.

Données : l'amplitude du fondamental d'un signal carré d'amplitude E vaut $\frac{4E}{\pi}$.

Oral, CCP, PSI, 2003.

Ex. 3 Filtre de Butterworth d'ordre 2

On étudie le montage ci-dessous :



avec $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.

1) Exprimer $\underline{T} = \frac{u}{e}$.

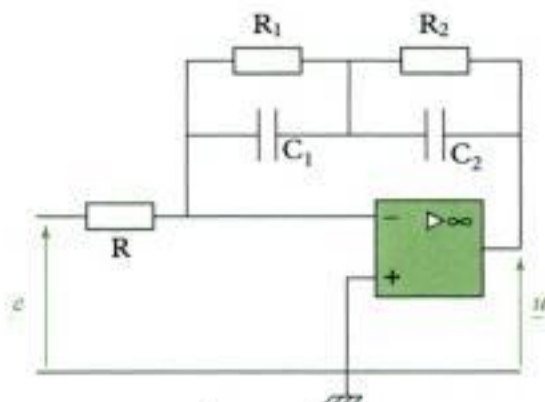
2) À quelle condition sur C_2 a-t-on $\underline{T}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}}}$?

3) Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondants.

Oral, Mines sup, 1998.

Ex. 4 Étude harmonique d'un filtre actif

On étudie le montage suivant :



1) Exprimer $\underline{H} = \frac{u}{e}$ sous la forme :

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Données : $R = 1,04 \text{ k}\Omega$; $C_1 = 330 \text{ nF}$; $C_2 = 100 \text{ nF}$.

2) Calculer R_1 et R_2 pour avoir $\omega_1 = 100 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_2 = 4\,000 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

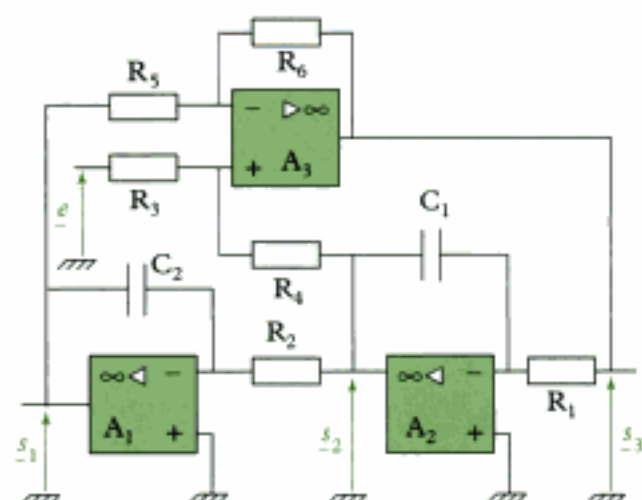
3) Tracer le diagramme de Bode du gain.

4) À quoi sert ce montage ?

Oral, Mines sup, 1998.

Ex. 5 Réseau à variables d'état

On étudie le montage suivant :



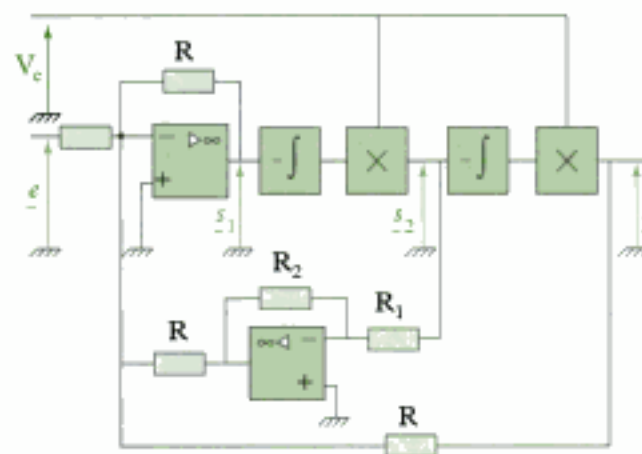
Les grandeurs sont sinusoïdales de pulsation ω . On pose $p = j\omega$.

Établir les fonctions de transfert $H_i(p)$ relatives aux sorties $s_i(p)$. Quelles sont les fonctions ainsi réalisées par ce montage ?

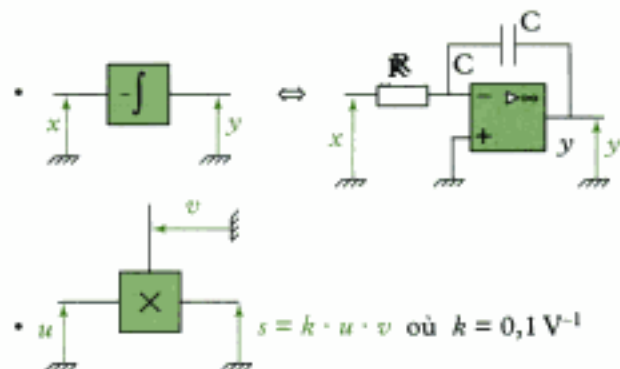
Niveau 2

Ex. 6 Filtre à base de multiplieurs

Soit le montage suivant où tous les A.O. sont supposés parfaits et fonctionnant en régime linéaire :



avec :



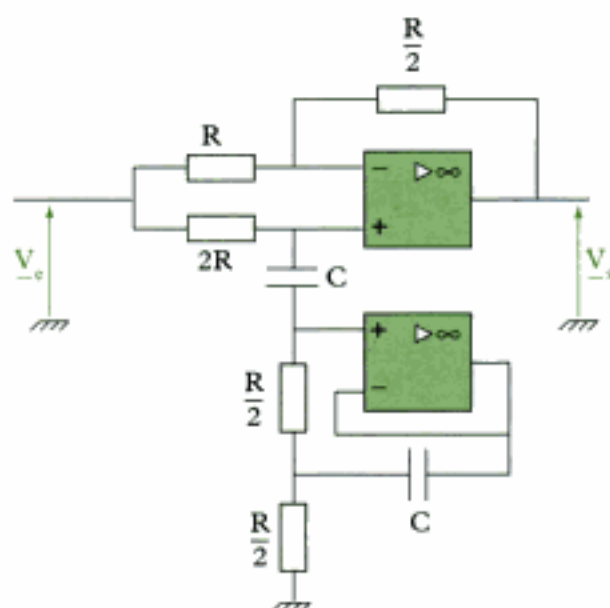
V_e est une tension continue.

- 1) Exprimer la fonction de transfert T_i de chaque étage.
- 2) Tracer les diagrammes de Bode correspondant aux sorties s_i .
- 3) Exprimer la fonction de transfert $T = \frac{s}{e}$. De quel type de filtre s'agit-il ?
- 4) On souhaite avoir un filtre avec la variation du gain la plus faible possible dans la bande passante. Quelles doivent être les relations entre les différents composants ?

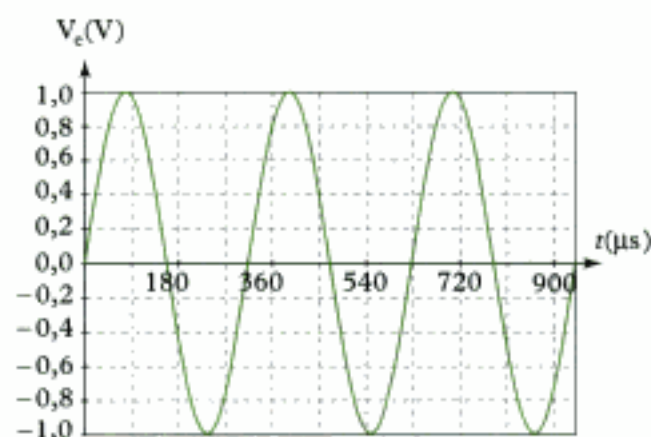
Oral, Centrale-Supélec, PSI, 1996.

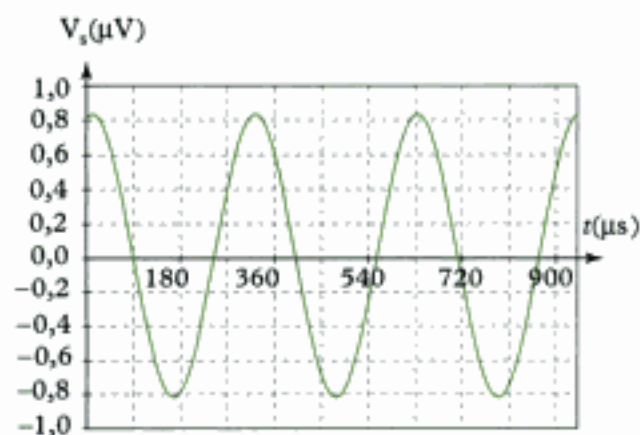
Ex. 7 Filtre réjecteur de fréquences

Soit le montage suivant où les A.O. sont parfaits :

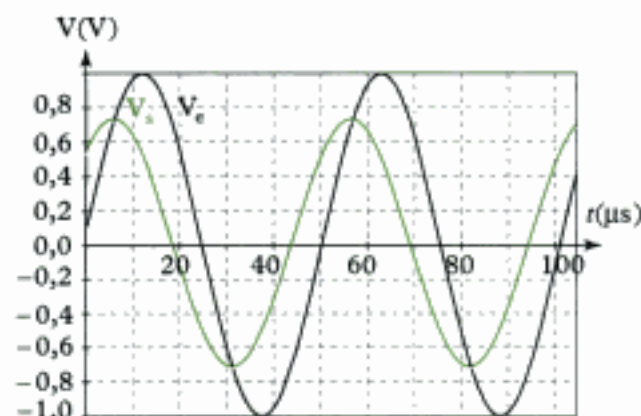


- 1) Déterminer la fonction de transfert.
- 2) Représenter le diagramme de Bode du gain.
- 3) Retrouver directement le comportement asymptotique.
- 4) On prend $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$. Commenter les courbes obtenues par simulation et données ci-dessous :
a) fréquence du signal d'entrée : $f = 3183 \text{ Hz}$





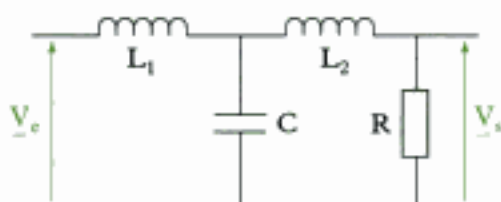
b) fréquence du signal d'entrée : $f = 19\,614\text{ Hz}$



Oral, Centrale-Supélec, 1996.

Ex. 8 Effet d'un filtre passif sur une tension carrée

Le module de la fonction de transfert du filtre représenté ci-dessous est $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = 6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



On injecte en entrée un signal T-périodique :

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

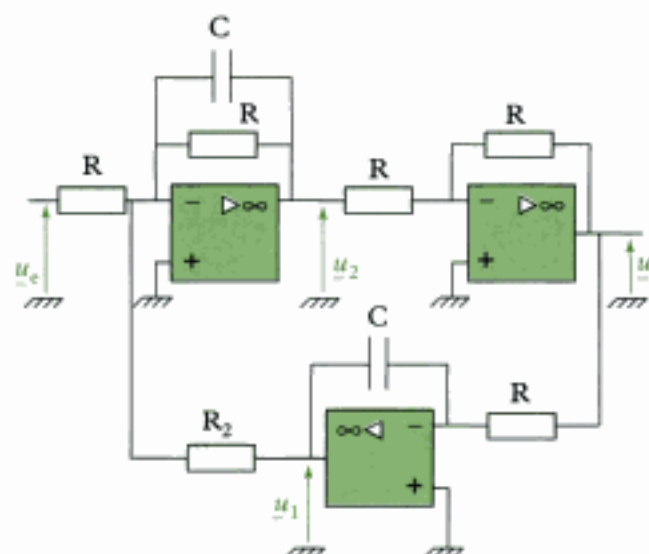
1) Donner l'allure du signal de sortie pour $T = 10 \text{ ms}$; $T = 1 \text{ ms}$; $T = 0,1 \text{ ms}$.

2) Montrer que ce filtre peut avoir une fonction de transfert de module $\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$ et déterminer L_1 , L_2 en fonction de R et C .

Oral, Mines-Ponts, MP, 2002.

Ex. 9 Effet d'un filtre actif sur une tension carrée

Soit le montage où les A.O. sont parfaits :



1) Déterminer la fonction de transfert :

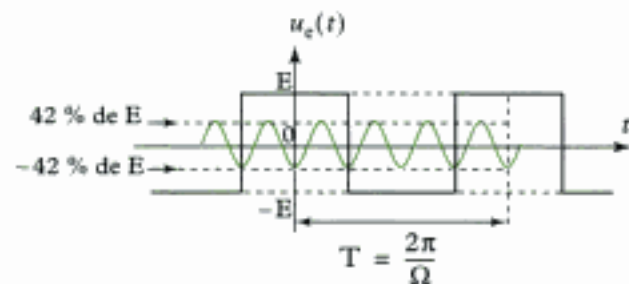
$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$$

du système et la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

À quel type de filtre correspond-elle ? Quel est son rôle ? Comment obtenir ce filtre à partir de composants passifs et d'un montage simple ? Quel est l'avantage du montage à A.O. ?

2) On considère à présent une tension carrée $u_e(t)$ représentée ci-dessous :



On a également représenté en concordance de temps un harmonique de la tension de sortie $u_s(t)$. On donne la décomposition en série de Fourier de $u_e(t)$ pour ses trois premiers harmoniques :

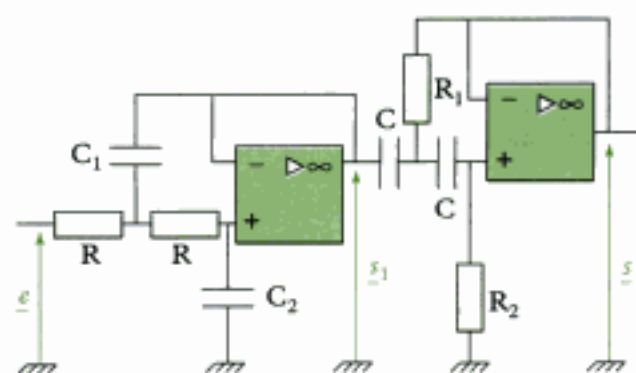
$$u_e(t) = \frac{4E}{\pi} \cdot \left(\cos \Omega t - \frac{1}{3} \cos 3\Omega t + \frac{1}{5} \cos 5\Omega t - \dots \right).$$

Tracer le spectre de $u_e(t)$ et $G = |\underline{H}(j\omega)|$ sur un même graphique. Déterminer les amplitudes et fréquences des harmoniques considérés en sortie du montage.

Oral, CCP, PSI, 2001.

Ex. 10 Filtre téléphonique 300 – 3 200 Hz

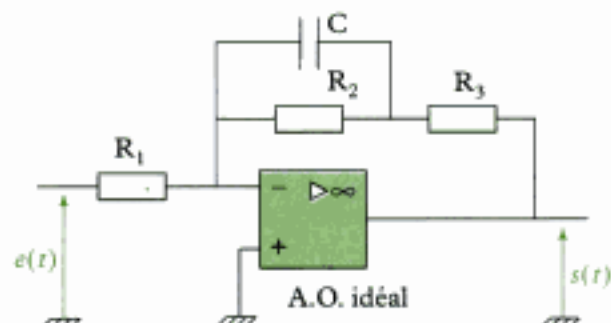
Soit le montage suivant où les A.O. sont parfaits :



$R = 10 \text{ k}\Omega$; $R_1 = 8 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 16 \text{ k}\Omega$; $C = 47 \text{ nF}$;
 $C_1 = 7 \text{ nF}$; $C_2 = 3,5 \text{ nF}$.

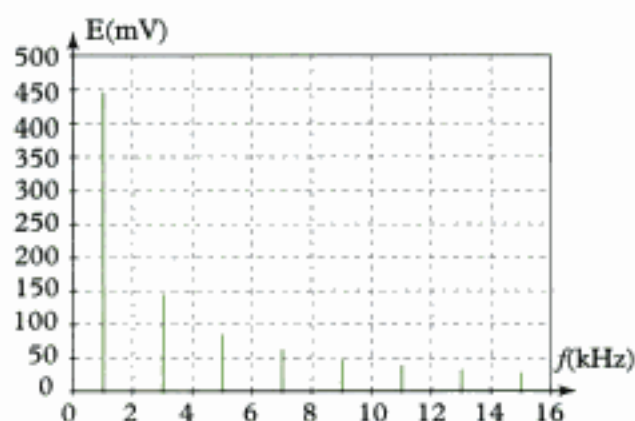
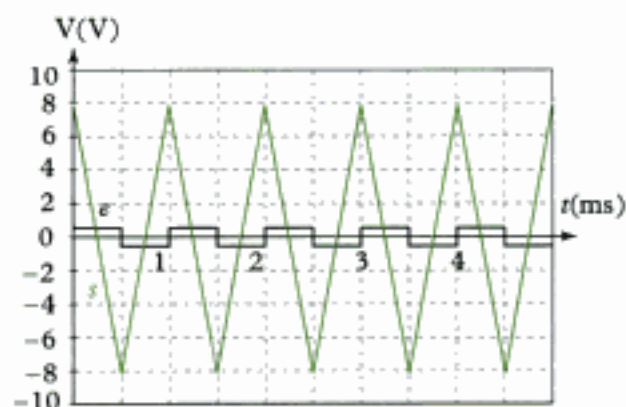
- 1) Exprimer les transmittances $\underline{H}_1 = \frac{s_1}{e}$ et $\underline{H}_2 = \frac{s}{s_1}$.
- 2) Déterminer la fonction de transfert \underline{H} du montage complet en justifiant la méthode employée. Quelle est la nature du filtre ainsi réalisé ?
- 3) Représenter les diagrammes de Bode réels et asymptotiques associés à \underline{H} . Commenter.

Ex. 11 Caractère intégrateur d'un filtre



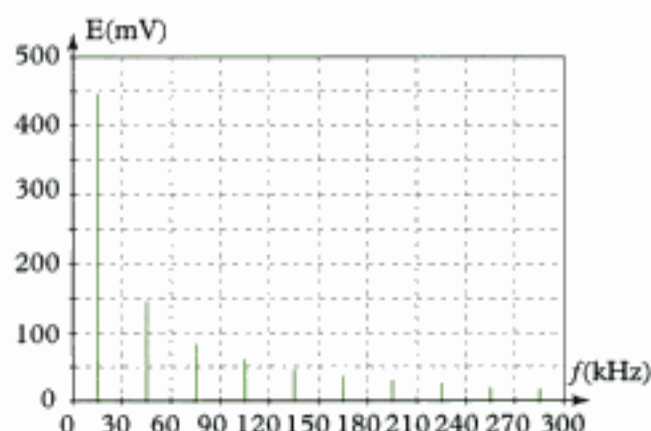
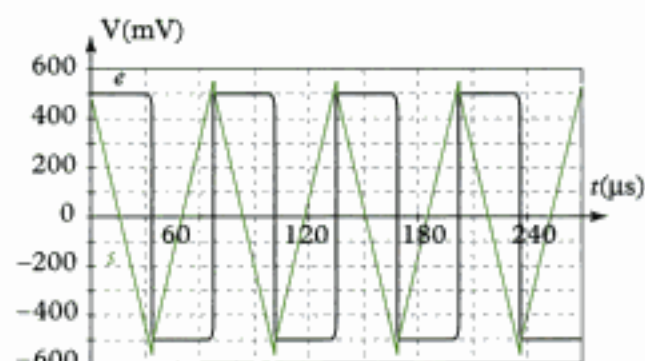
$R_1 = 1 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 220 \text{ k}\Omega$; $R_3 = 47 \text{ }\Omega$; $C = 15 \text{ nF}$.

- 1) Établir l'expression de la fonction de transfert. Représenter les diagrammes de Bode.
- 2) On impose une tension d'entrée $e(t)$ en créneau, de fréquence 1 kHz. On donne ci-dessous les chronogrammes temporels de $e(t)$ et du signal de sortie $s(t)$ ainsi que le spectre (en valeurs efficaces) du signal d'entrée :



Commenter les résultats obtenus.

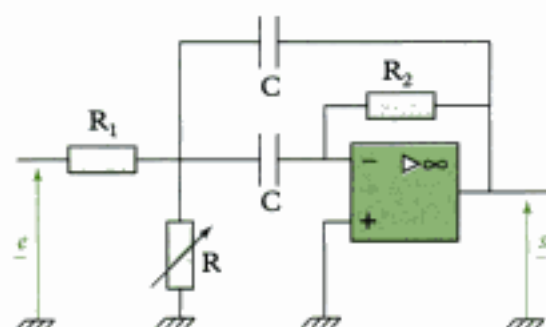
- 3) On modifie la fréquence du signal d'entrée qui passe à 15 kHz. Les chronogrammes de $e(t)$ et $s(t)$ ainsi que le spectre (en valeurs efficaces) du signal d'entrée $e(t)$ sont à nouveau relevés :



Commenter ces résultats.

Ex. 12 Filtre d'analyse spectrale

Soit le filtre suivant où l'A.O. est idéal :



$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$;
 R peut varier de 100Ω à $10 \text{ k}\Omega$.

1) Établir la fonction de transfert du filtre. Quelle est la nature du filtre ? Préciser les paramètres caractéristiques et commenter les résultats obtenus.

2) Ce montage peut servir à réaliser l'analyse harmonique d'un signal $e(t)$: expliquer.

3) On cherche à extraire le fondamental et l'harmonique 3 d'un signal carré $e(t)$, de valeur moyenne nulle, d'amplitude E_m , de fréquence $f = 200 \text{ Hz}$.

a) Quels réglages doivent être effectués ?

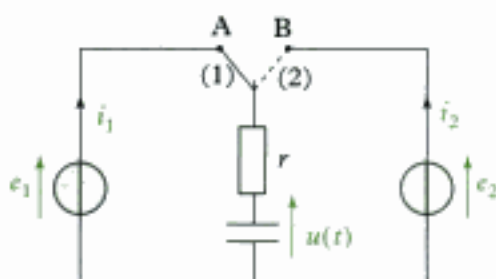
b) Donner l'équation instantanée de la tension de sortie lorsque le filtre sélectionne l'un ou l'autre de ces deux harmoniques.

Donnée :
$$e(t) = \frac{4E_m}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\omega t]}{2k+1}$$

avec $\omega = 2\pi f$ et $e(t)$ supposée impaire.

Niveau 3

Ex. 13 Filtre à condensateurs commutés



Un dipôle, constitué d'un condensateur de capacité C et d'une résistance r associés en série, est connecté alternativement et périodiquement à deux sources de tensions continues de f.e.m. respectives e_1 et e_2 grâce à un interrupteur parfait à deux positions. La commutation d'une position à l'autre est supposée instantanée. La période et la fréquence de commutation sont notées respectivement T_c et f_c ; l'interrupteur est dans la position (1) pendant les intervalles de temps correspondant aux demi-périodes :

$[nT_c ; (n + \frac{1}{2}) \cdot T_c]$ où n est un entier positif, et dans la position (2) le reste du temps.

1) Écrire l'équation différentielle à laquelle obéit la tension $u_1(t)$ aux bornes du condensateur lorsque l'interrupteur est dans la position (1). Exprimer $u_1(t)$ entre les instants $t = nT_c$ et $t = nT_c + \frac{T_c}{2}$, sachant que $\tau = rC \ll \frac{T_c}{2}$.

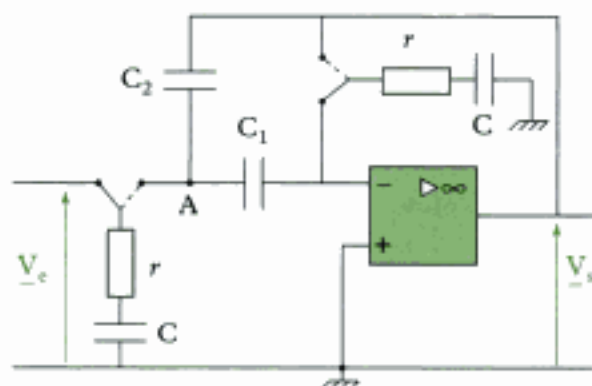
Exprimer la tension $u_2(t)$ aux bornes du condensateur entre les instants $t = nT_c + \frac{T_c}{2}$ et $t = (n+1)T_c$, lorsque l'interrupteur est en position (2).

2) Exprimer les valeurs instantanées $i_1(t)$ et $i_2(t)$ des courants débités par les sources de tension à chaque alternance de commutateur, ainsi que leurs valeurs moyennes respectives $\langle i_1 \rangle$ et $\langle i_2 \rangle$ sur une période T_c de commutation.

3) Montrer que du point de vue des bornes A et B et relativement aux grandeurs électriques moyennes, ce circuit se comporte comme un dipôle de résistance équivalente R_e . Exprimer R_e en fonction de C et f_c .

4) Les f.e.m. des générateurs sont maintenant des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence f . Le circuit se comporte-t-il toujours comme un dipôle de résistance équivalente R_e sachant que $f_c \gg f$?

5) On considère à présent le filtre à condensateurs commutés représenté ci-dessous :



Les deux condensateurs utilisés dans la commutation sont identiques, et la fréquence de commutation est la même pour les deux condensateurs.

Exprimer la fonction de transfert $T = \frac{V_s}{V_c}$ du montage

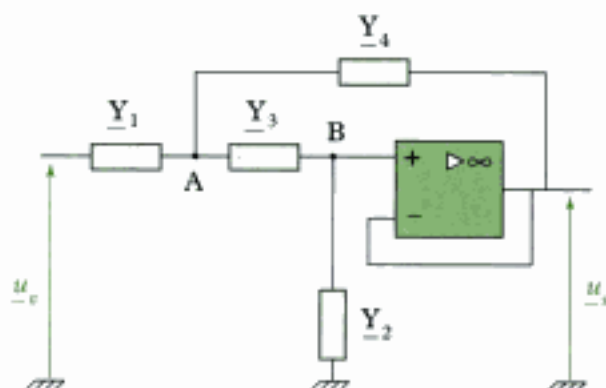
en fonction de C_1 , C_2 et de la résistance R_e équivalente à chacun des circuits à condensateurs commutés.

6) Donner les expressions du gain à la résonance G_0 , de la pulsation propre ω_0 et du coefficient de sélectivité Q en fonction de C_1 , C_2 , C et f_c .

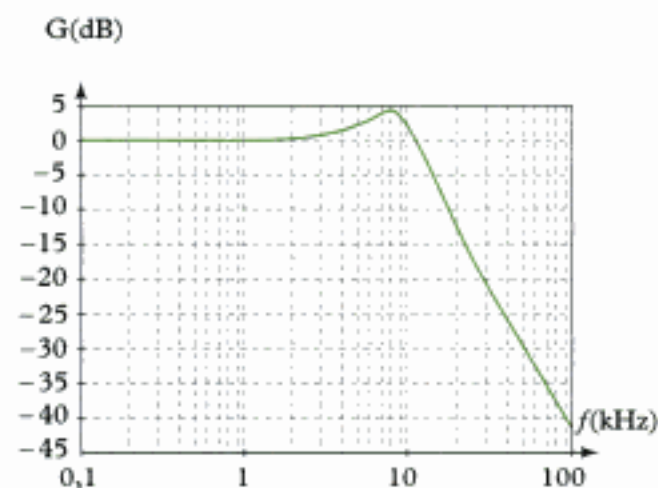
D'après écrit, CCP, option M 1994.

Ex. 14 Synthèse de filtre à partir d'une structure et du gabarit

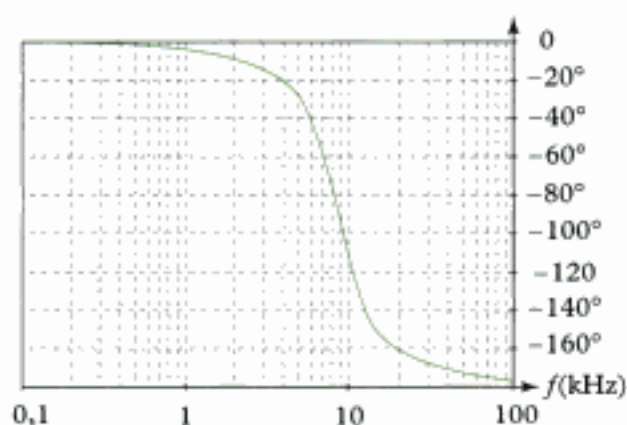
On étudie la structure suivante où l'A.O. est idéal et fonctionne en régime linéaire :



Les admittances \underline{Y}_i correspondent soit à des résistances soit à des condensateurs, le montage comportant deux résistances et deux condensateurs. On donne ci-dessous les diagrammes de Bode :



Phase (degrés)



1) Donner la valeur du gain statique (gain dans la bande passante), de la pulsation propre et du facteur de qualité.

2) Montrer que la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}$$

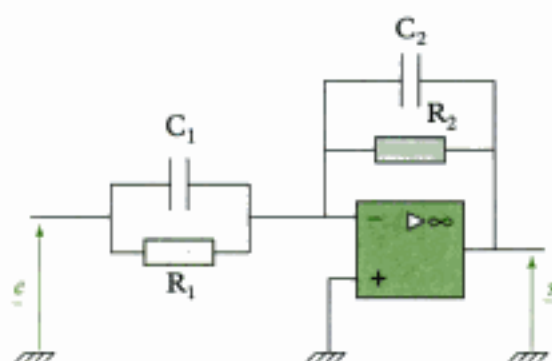
3) Identifier la nature des admittances.

4) Donner la valeur numérique des capacités des condensateurs sachant que les résistances ont pour valeur $R = 10 \text{ k}\Omega$.

Oral, CCP, PSI, 2002.

Ex. 15 Intérêts comparés d'un filtre actif et d'un filtre passif

On considère le montage ci-après où l'A.O. est idéal :



1) Écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = -H_0 \cdot \frac{1 + j \frac{f}{f_c}}{1 + j H_0 \frac{f}{f_c}}$$

On précisera les expressions de H_0 et f_c en faisant apparaître une condition nécessaire portant sur les valeurs des composants du montage.

2) Tracer les diagrammes de Bode (on prendra $R_1 = 2R_2$).

3) Discuter de la pertinence du choix d'un filtre actif pour réaliser ce transfert à la vue du diagramme du gain en basses fréquences. Que penser du choix d'un filtre passif « équivalent » en hautes fréquences ?

4) On suppose maintenant H_0 constant et quelconque. Identifier le rôle de ce montage vis-à-vis des deux fréquences de coupure du diagramme de Bode.

Est-ce avantageux en pratique ?

5) On souhaite que ce filtre présente un gain statique de signe positif.

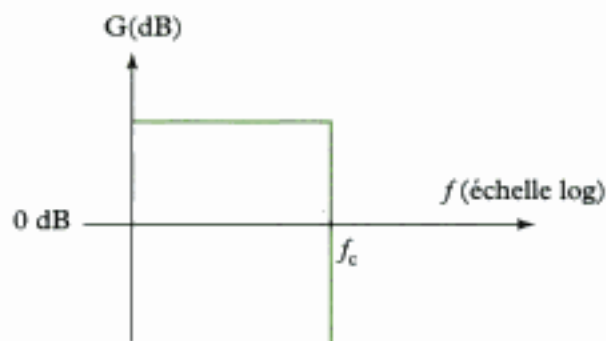
Comment réaliser une telle condition simplement ? Peut-on émettre des réserves quant à cette mise en œuvre ?

Ex. 16 Questions ouvertes

1) Comment adapter un circuit de filtrage passif à une charge ?

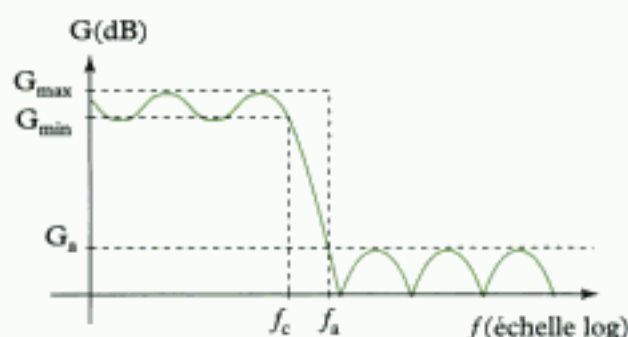
2) Donner un exemple de filtre actif le plus simple possible et réalisant la fonction coupe-bande à partir d'un filtre passif passe-bande.

3) Voici le diagramme de Bode d'un filtre passe-bas idéal :



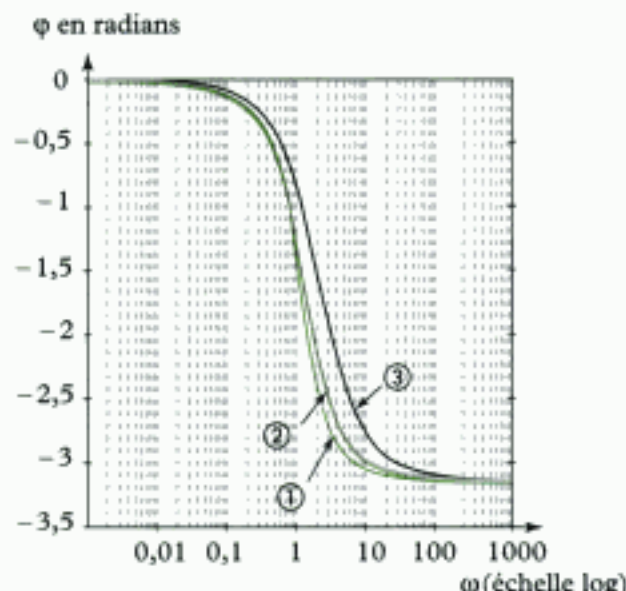
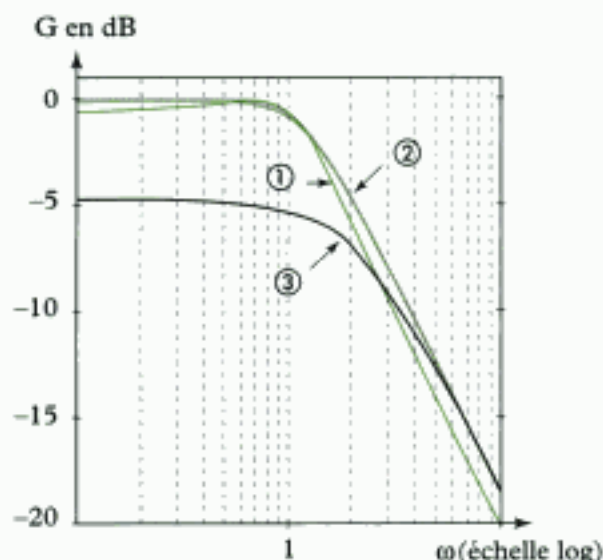
Est-il possible d'élaborer un tel filtre ?

4) On donne ci-dessous la courbe la plus générale possible du gain pour un filtre passe-bas que l'on peut obtenir avec des filtres d'ordre élevé :

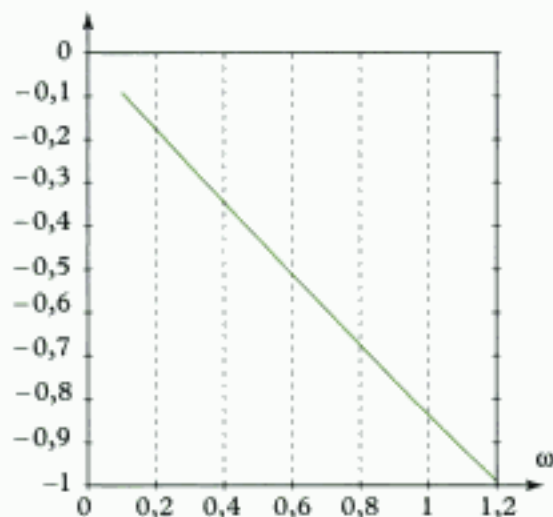


Commenter.

5) On donne ci-dessous les courbes de gain et d'argument pour trois filtres différents mais tous d'ordre 2 (pour le filtre ③ on a rajouté le tracé de la phase φ en fonction de la pulsation ω en échelle linéaire et dans la bande passante) :



φ en radians pour ③



Commenter.

Indications

Ex. 4 3) Penser à utiliser les résultats connus pour les filtres élémentaires.

Ex. 6 4) Quelle valeur du facteur de qualité correspond à la contrainte imposée ?

Ex. 7 4) Identifier la zone spectrale concernée pour le filtre.

Ex. 9 2) Comment expliquer l'allure du signal de sortie du filtre ?

Ex. 13 1) Si la constante de temps est faible devant la demi-période, alors la charge du condensateur est complète au cours de cet intervalle de temps.

Ex. 15 La qualité d'un montage réside notamment dans ses possibilités d'évolution.

Ex. 16 Ce type de questions, volontairement peu détaillées, nécessite de faire appel à l'ensemble du cours. Il faut aussi faire preuve d'initiative.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) • L'A.O. permet d'isoler les deux cellules R-C, en amont, et C-R en aval, qui constituent deux filtres en cascade dont on peut ainsi multiplier les fonctions de transfert pour obtenir la fonction de transfert de l'ensemble du montage.

• Fonction de transfert

L'A.O. étant supposé idéal, en appliquant le diviseur de tension, il vient :

$$\underline{H}_1 = \frac{e^+}{e^-} = \frac{1}{\frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (\text{passe-bas du 1}^{\text{er}} \text{ ordre})$$

et

$$\underline{H}_2 = \frac{s}{e^+} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad (\text{passe-haut du 1}^{\text{er}} \text{ ordre}).$$

D'où : $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$, soit :

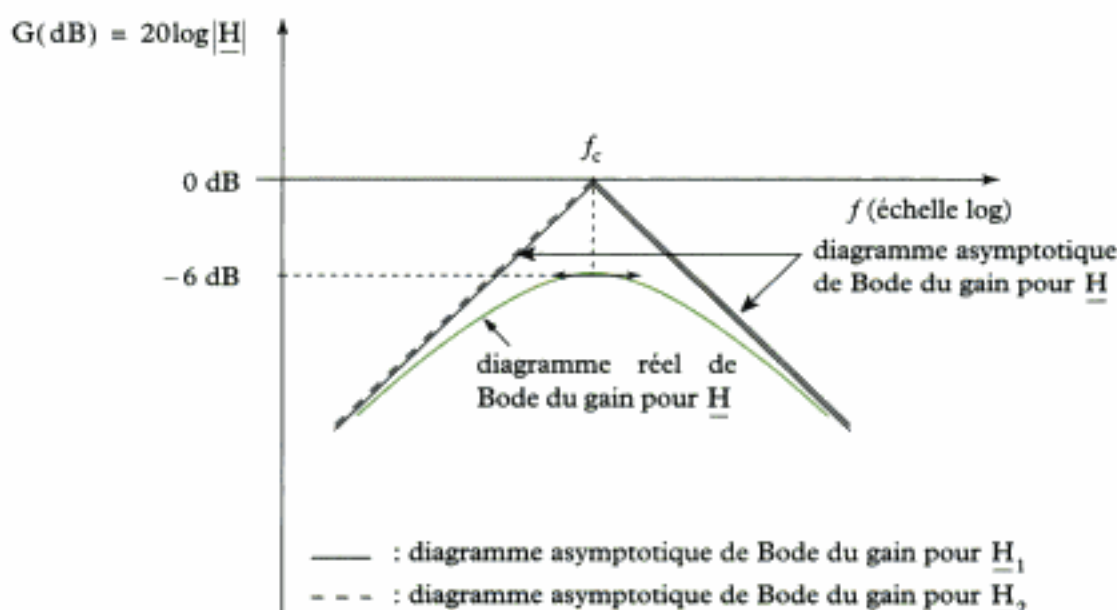
$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)^2}$$

• Diagrammes de Bode

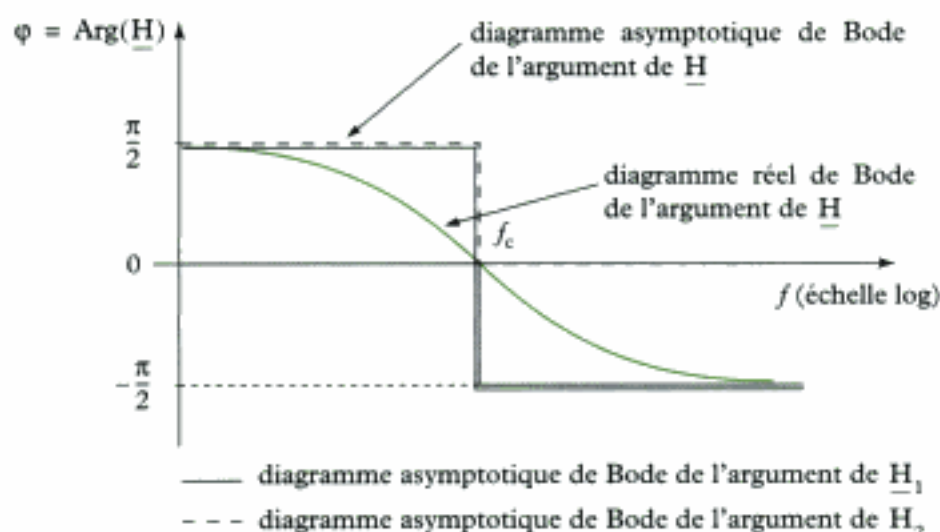
On commence par tracer les diagrammes de Bode asymptotiques du filtre passe-bas et du filtre passe-haut qui ont la même fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

On en déduit ensuite le gain G en dB des diagrammes asymptotiques de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 :



De même, on déduit le diagramme de Bode de l'argument φ de \underline{H} en additionnant ceux de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 :



Exercice 2

Pour déterminer les paramètres, il faut étudier les résultats de chaque expérience.

• Commençons par l'expérience 2. On observe un signal de sortie quasi-sinusoïdal et de même période que le signal d'entrée : on peut donc admettre qu'il s'agit du fondamental du signal d'entrée qui est sélectionné par le filtre. De plus, pour une fréquence légèrement différente (supérieure comme inférieure), l'amplitude du signal de sortie diminue ce qui permet de conclure que la fréquence des signaux est alors égale à $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ car :

$$|\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \text{ est maximal si } \omega = \omega_0.$$

On lit sur l'oscillogramme :

$$T_0 = 4 \times 10 \text{ ms} = 40 \text{ ms} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{40 \cdot 10^{-3}} = 157 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette expérience permet également de déterminer H_0 à partir du calcul de l'amplitude :

– du fondamental de $V_e(t)$: $4 \times \frac{E}{\pi} = \frac{4 \times 0,05}{\pi} \text{ V}$;



L'amplitude du signal d'entrée est égale à la moitié d'une division de l'axe y soit ici 0,05 V compte tenu de la sensibilité verticale de la voie de mesure de $V_e(t)$.

– du signal de sortie $V_s(t) = 3 \text{ V}$: $H_0 = \frac{3}{\frac{0,2}{\pi}} = 47,1$.

• Passons à l'expérience 1 ; le signal de sortie est ici triangulaire donc proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée. Celui-ci est donc dans la bande coupée H.F. comme le confirme la lecture de la base de temps (10 μs par division) :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{10 \mu\text{s}}{40 \text{ ms}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = 40 \gg \frac{\omega_0}{\omega}.$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0 \cdot \omega_0}{Q} \times \frac{1}{j\omega}$$

$$\Leftrightarrow j\omega \cdot \underline{V}_s = \frac{H_0 \cdot \omega_0}{Q} \cdot \underline{V}_e.$$

Ainsi, lorsque $V_e(t) = 2E$, on lit sur l'oscillogramme :

$$\frac{\Delta V_s}{\Delta t} = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \times 2E \Leftrightarrow Q = \frac{2H_0 \omega_0 E}{\frac{\Delta V_s}{\Delta t}}$$

avec : $\Delta t = 2 \text{ ms}$ (2 divisions sur x), $\Delta V_s = 60 \text{ mV}$ (3 divisions sur y) et $E = 0,05 \text{ V}$ (0,5 division sur y), donc :

$$Q = \frac{2 \times 47,1 \times 157 \times 0,05}{\frac{60 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}} = 24,6.$$

Exercice 3

1) On applique la méthode n° 1 en nommant A le nœud commun aux dipôles R_1 , R_2 et C_2 . Le théorème de Millman en A donne :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{e}}{R_2} + jC_2\omega \cdot \underline{u} + \frac{\underline{u}}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega + \frac{1}{R_1}} \quad (1) \quad (\text{car } \underline{e}^+ = \underline{e}^- = \underline{u} \text{ pour l'A.O. supposé idéal}).$$

La loi des nœuds appliquée sur l'entrée inverseuse de l'A.O. fournit :

$$\frac{\underline{V}_A - \underline{u}}{R_1} + \frac{0 - \underline{u}}{\frac{1}{jC_1\omega}} = \underline{i}^- \quad \text{avec } \underline{i}^- = 0 \text{ (A.O. idéal)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V}_A - \underline{u} = jR_1C_1\omega \cdot \underline{u} \Leftrightarrow \underline{V}_A = \underline{u}(1 + jR_1C_1\omega) \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\underline{u} \cdot (1 + jR_1C_1\omega) = \frac{\frac{\underline{e}}{R_2} + jC_2\omega \cdot \underline{u} + \frac{\underline{u}}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + jC_2\omega + \frac{1}{R_1}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{u} \cdot \left[(1 + jR_1C_1\omega) \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + jC_2\omega \right) - jC_2\omega - \frac{1}{R_1} \right] = \frac{\underline{e}}{R_2}$$

donc :

$$\underline{T} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\frac{R_1 + R_2}{R_2}C_1\omega + R_1R_2C_1C_2(j\omega)^2}$$

soit :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j(R_1 + R_2)C_1\omega + R_1R_2C_1C_2(j\omega)^2}$$

2) On commence par calculer $|\underline{T}|$:

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 + [(R_1 + R_2)C_1\omega]^2}}$$

avec : $(1 - R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 + [(R_1 + R_2)C_1\omega]^2$

$$= 1 + (R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 - 2R_1R_2C_1C_2\omega^2 + (R_1 + R_2)^2C_1^2\omega^2.$$

Si on pose alors $f(\omega) = 2R_1R_2C_1C_2\omega^2 + (R_1 + R_2)^2C_1^2\omega^2$, on constate que si $f(\omega) = 0$, alors il est possible d'écrire $|\underline{T}|$ sous la forme proposée à condition de poser :

$$1 + (R_1R_2C_1C_2\omega^2)^2 = 1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}.$$

Ce qui donne par identification :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Il faut donc chercher à quelle condition on a $f(\omega) = 0$:

$$2R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + (R_1 + R_2)^2 C_1^2 \omega^2 = 0 \Leftrightarrow 2R_1 R_2 C_2 = C_1 \cdot (R_1 + R_2)^2$$

$$\Leftrightarrow C_2 = \frac{(R_1 + R_2)^2 \cdot C_1}{2R_1 R_2} = \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2}{2R_1 R_2} \cdot C_1$$

d'où :

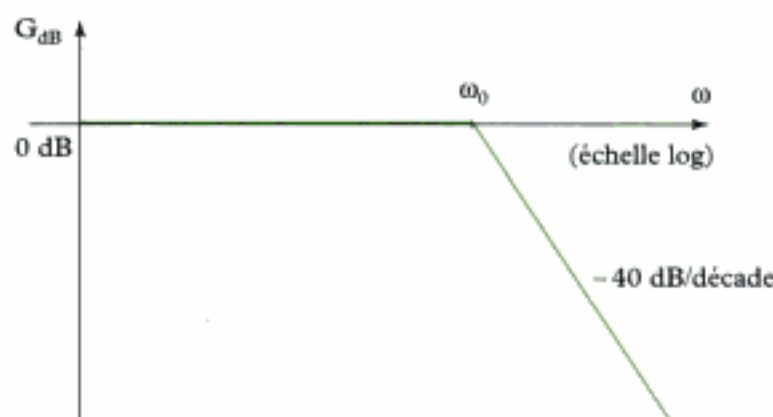
$$C_2 = \left(1 + \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2}\right) \cdot C_1 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$3) \cdot |T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}} \Rightarrow G_{dB} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\right]$$

- si $\omega \rightarrow 0$: $G_{dB} \rightarrow 0$ dB

- si $\omega \rightarrow +\infty$: $G_{dB} \rightarrow -40 \log \omega + 40 \log \omega_0$

d'où :

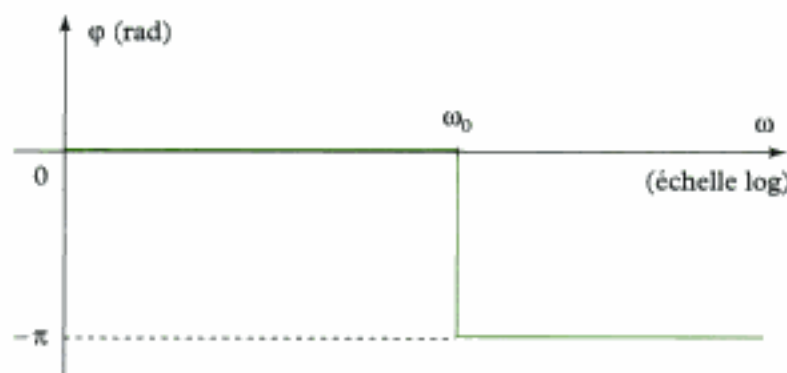


• En notant ϕ l'argument de $T(j\omega)$, on a :

- si $\omega \rightarrow 0$: $\phi \rightarrow \text{Arctan}(1) = 0$

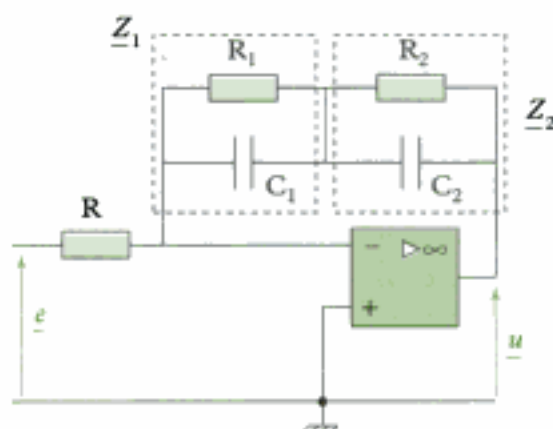
- si $\omega \rightarrow \infty$: $\phi \rightarrow \text{Arg} \left[\frac{1}{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right] = -\pi$ (modulo 2π)

d'où :



Exercice 4

1) Pour déterminer \underline{H} , on fait apparaître trois impédances notées \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 et \underline{Z} mises en évidence ci-dessous :



Comme $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$, on a :

$$\underline{Z} = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{jC_1\omega}}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{jC_2\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} + \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

L'impédance \underline{Z} associée à la résistance R constitue un montage inverseur tel que :

$$\underline{H} = \frac{u}{e} = -\frac{\underline{Z}}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{R_1 \cdot (1 + jR_2C_2\omega) + R_2 \cdot (1 + jR_1C_1\omega)}{(1 + jR_1C_1\omega) \cdot (1 + jR_2C_2\omega)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = -\frac{R_1 + R_2}{R} \cdot \frac{1 + j\frac{R_1R_2(C_1 + C_2)}{R_1 + R_2}\omega}{(1 + jR_1C_1\omega) \cdot (1 + jR_2C_2\omega)}$$

La condition de transfert s'écrit bien sous la forme $\underline{H} = H_0 \cdot \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega'}}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) \cdot \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$ si on pose :

$$H_0 = -\frac{R_1 + R_2}{R}$$

$$\omega' = \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2 \cdot (C_1 + C_2)}; \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

$$2) \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1C_1} \Leftrightarrow R_1 = \frac{1}{C_1\omega_1} = \frac{1}{330 \cdot 10^{-9} \times 100\pi} = 9,65 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = \frac{1}{C_2\omega_2} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-9} \times 4\,000\pi} = 796 \text{ }\Omega.$$

3) Avant de tracer les diagrammes de Bode, on calcule ω' :

$$\omega' = \frac{9\,650 + 796}{9\,650 \times 796 \times (330 + 100) \cdot 10^{-9}} = 3\,163 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

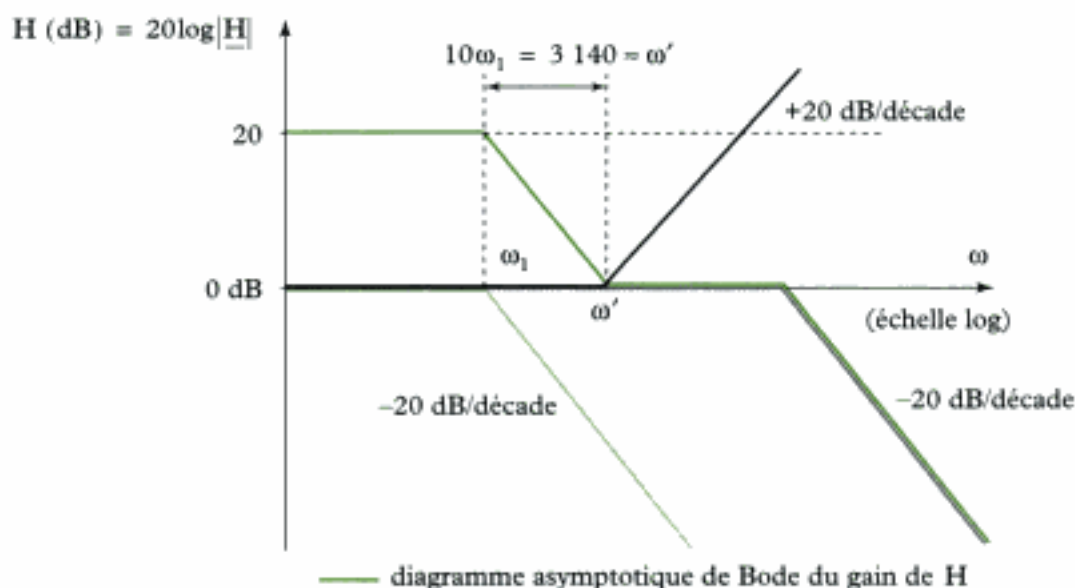
$$\text{et } \omega_1 = 100 \cdot \pi = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \quad \omega_2 = 4\,000\pi = 12\,566 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pour tracer facilement les diagrammes de Bode, on décompose ensuite \underline{H} en produit de fonctions de transfert élémentaires :

$$\underline{H} = H_0 \times \underbrace{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega'}\right)}_{\substack{\underline{H}' \\ \text{passe-haut} \\ \text{du 1}^{\text{er}} \text{ ordre}}} \times \underbrace{\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}}_{\substack{\underline{H}_1 \\ \text{passe-bas} \\ \text{du 1}^{\text{er}} \text{ ordre}}} \times \underbrace{\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}}_{\substack{\underline{H}_2 \\ \text{passe-bas} \\ \text{du 1}^{\text{er}} \text{ ordre}}}$$

avec $H_0 = \frac{-9\,650 \times 796}{1\,040} = -10 \Rightarrow H_0(\text{dB}) = +20 \text{ dB}$.

On obtient le diagramme de Bode asymptotique du gain pour \underline{H} en additionnant les diagrammes de Bode de \underline{H}_1 , \underline{H}_2 et \underline{H}' d'où :



Remarque : $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$; $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 2 \text{ kHz}$; $f' = \frac{\omega'}{2\pi} = 503 \text{ Hz}$.

4) Le filtre amplifie fortement les basses fréquences (20 dB correspond à une multiplication par 100 de l'amplitude du signal d'entrée). Les signaux de fréquence comprise entre 50 Hz et 500 Hz sont correctement transmis en amplitude. Enfin, les hautes fréquences ($> 2 \text{ kHz}$) sont atténuées.

Le montage peut être utilisé comme **filtre audio-fréquences qui transmet les sons graves** ($20 \text{ Hz} < f < 400 \text{ Hz}$), **les médiums** (entre 400 et 1 000 Hz) et **atténue les aigus** (à partir de 2 kHz).

Exercice 5

• Analyse qualitative préalable

Les fonctions de transferts $H_1(p)$, $H_2(p)$ associées aux A.O. A_1 et A_2 sont simples à établir. Par contre, le calcul est plus long pour la fonction de transfert $H_3(p)$ associée à A_3 . De plus, il nécessite de connaître les relations existant entre $S_2(p)$ et $S_3(p)$ d'une part, $S_1(p)$ et $S_3(p)$ d'autre part.

• Relation entre $S_2(p)$ et $S_3(p)$

On reconnaît un montage intégrateur, donc en posant $p = j\omega$, il vient :

$$S_1(p) = -\frac{1}{R_2 C_2} \cdot \frac{1}{p} \cdot S_2(p) \Rightarrow S_2(p) = -R_2 C_2 p \cdot S_1(p) \quad (1)$$

• **Relation entre $S_1(p)$ et $S_3(p)$**

De même, on a :

$$S_3(p) = -R_1 C_1 \cdot p \cdot S_2(p) \quad (2)$$

• **Détermination de $H_3(p) = \frac{S_3(p)}{E(p)}$**

A_3 est un montage soustracteur et on utilise la méthode n° 1 (pour alléger l'écriture, la dépendance de la variable p est omise dans les lignes de calcul intermédiaires suivantes) ; l'écriture du théorème de Millman conduit à :

$$e^- = \frac{\frac{S_1}{R_5} + \frac{S_3}{R_6}}{\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = e^+ = \frac{\frac{E}{R_3} + \frac{S_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad (A_3 \text{ idéal}).$$

Après développement et regroupement des termes, on a :

$$S_3 = \left[\frac{E}{R_3} \cdot \left(\frac{R_5 + R_6}{R_5 R_6} \right) + \frac{S_2}{R_4} \cdot \left(\frac{R_5 + R_6}{R_5 R_6} \right) \right] \cdot \frac{R_6 R_3 R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_6}{R_5} \cdot S_1.$$

À l'aide de (1) et (2), il vient :

$$S_3 = \frac{R_4}{R_5} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot E - \frac{1}{R_1 C_1 p} \cdot \frac{R_3}{R_5} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot S_3 - \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{S_1}{R_1 R_2 C_1 C_2 p^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_3}{E} = \frac{\frac{R_4}{R_5} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4}}{1 + \frac{R_3}{R_1 R_5 C_1} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \cdot \frac{1}{p^2}}.$$

En multipliant haut et bas par $\frac{R_5}{R_6} \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot p^2$ pour faire apparaître une forme normalisée, on obtient :

$$H_3(p) = \frac{S_3}{E} = \frac{R_4}{R_6} \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot \frac{p^2}{1 + \frac{R_3}{R_6} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot R_2 C_2 \cdot p + \frac{R_5}{R_6} \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot p^2}$$

Il s'agit d'un **filtre passe-haut du second ordre**.



Après un lourd calcul, une vérification (rapide) est toujours souhaitable. Ici, par exemple :

en basses fréquences, $p = j\omega \rightarrow 0$; sur le schéma électrique, on voit que $\frac{1}{C_1 p} \rightarrow \infty$, donc $S_3 \rightarrow e^-$ pour A_2 avec $e^- = e^+ = 0 \Rightarrow S_3 = 0$: cette sortie du montage ne laisse effectivement pas passer les basses fréquences.

• **Détermination de $H_2(p) = \frac{S_2(p)}{E(p)}$**

On utilise (2) et l'expression de $H_3(p)$ ce qui conduit à :

$$H_2(p) = -\frac{R_4}{R_6} \cdot R_2 C_2 \cdot \frac{p}{1 + \frac{R_3}{R_6} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot R_2 C_2 \cdot p + \frac{R_5}{R_6} \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot p^2}$$

Il s'agit d'un **filtre passe-bande du second ordre**.

• Détermination de $H_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)}$

On utilise (1) et l'expression de $H_2(p)$:

$$H_1(p) = \frac{\frac{R_4}{R_6}}{1 + \frac{R_3}{R_6} \cdot \frac{R_5 + R_6}{R_3 + R_4} \cdot R_2 C_2 \cdot p + \frac{R_5}{R_6} \cdot R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot p^2}$$

Il s'agit d'un **filtre passe-bas du second ordre**.

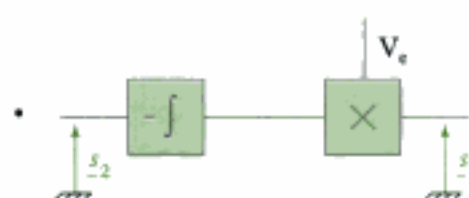
Exercices de niveau 2

Exercice 6

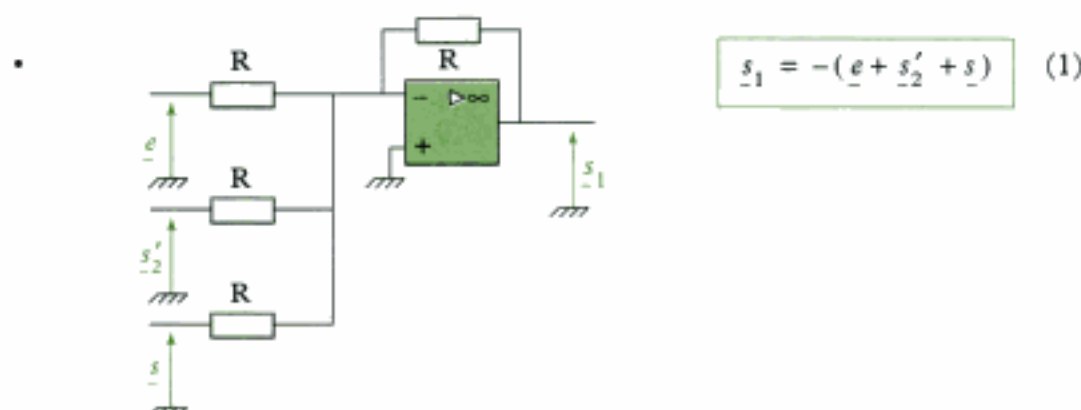
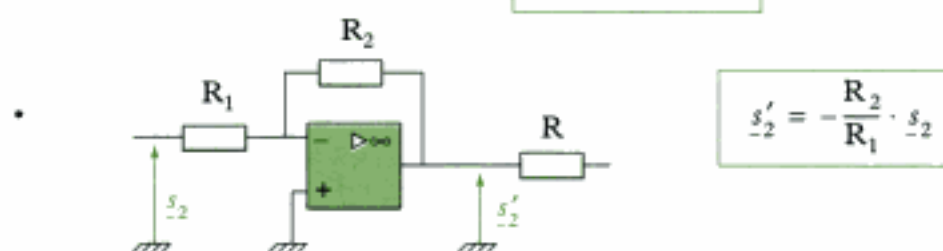
1) Calcul de la fonction de transfert de chaque étage :



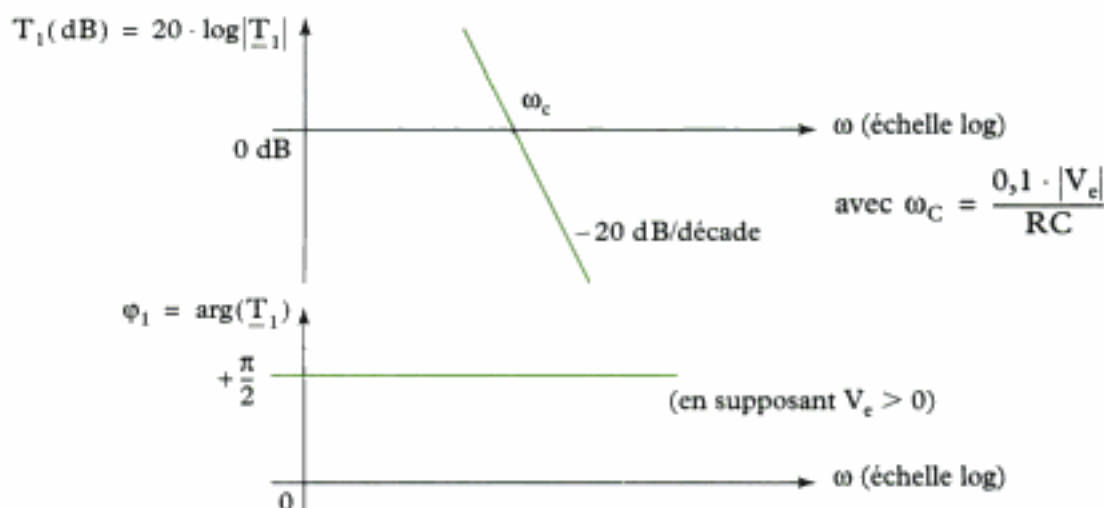
Donc : $s_2 = 0,1 \cdot V_e \cdot \left(-\frac{1}{jRC\omega}\right) \cdot s_1 \Rightarrow \underline{T}_1 = -\frac{0,1 \cdot V_e}{jRC\omega}$



De même : $s = -0,1 \cdot V_e \cdot \frac{s_2'}{jRC\omega} \Rightarrow \underline{T}_2 = -\frac{0,1 \cdot V_e}{jRC\omega}$



2) Diagrammes de Bode de \underline{T}_1 et \underline{T}_2 :



Les diagrammes de Bode de \underline{T}_2 sont identiques à ceux de \underline{T}_1 .

3) On reprend la relation (1) dans laquelle on élimine \underline{s}_1 et \underline{s}_2' , avec :

$$\underline{s} = -\frac{V_e}{jRC\omega} \cdot \underline{s}_2 \Rightarrow \underline{s}_2' = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{s}_2 = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{jRC\omega}{V_e}\right) \cdot \underline{s} \quad (2)$$

$$\underline{s}_1 = -\frac{jRC\omega}{V_e} \cdot \underline{s}_2 = -\frac{jRC\omega}{V_e} \cdot \left(-\frac{jRC\omega}{V_e} \cdot \underline{s}\right) = \left(\frac{jRC\omega}{V_e}\right)^2 \cdot \underline{s} \quad (3)$$

les relations (2) et (3) reportées dans (1) donnent :

$$\left(\frac{jRC\omega}{V_e}\right)^2 \cdot \underline{s} = -\underline{e} - \frac{jRC\omega}{V_e} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{s} - \underline{s}$$

Donc :

$$\underline{T} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{RC}{V_e} \cdot (j\omega) + \left(\frac{RC}{V_e}\right)^2 \cdot (j\omega)^2}$$

Il s'agit d'un **filtre passe-bas du second ordre**.

4) On commence par introduire la forme normalisée du filtre mis en évidence en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$\underline{T} = -\frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}, \quad \text{d'où : } \begin{cases} \frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{RC}{V_e} \\ \left(\frac{RC}{V_e}\right)^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = \frac{R_1}{R_2} \\ \omega_0 = \frac{V_e}{RC} \end{cases}$$

Afin que la variation du gain dans la bande passante soit la plus faible possible, il est nécessaire qu'aucun phénomène de résonance n'ait lieu dans la bande passante. On cherche la condition correspondante en étudiant $|\underline{T}|$. Ici :

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$|\underline{T}(x)|$ admet un maximum (résonance) si $y(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$ présente un minimum. Or :

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x + \frac{2x}{Q^2} = 2x \cdot \left[2x^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)\right].$$

Ce résultat montre que si $\frac{1}{Q^2} - 2 > 0$, $y(x)$ ne présente aucun minimum (pour $x > 0$) et donc aucun phénomène de résonance n'est observé : le diagramme réel du gain est situé sous le diagramme asymptotique.

On doit donc avoir : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$.

Enfin, ajoutons que plus Q est élevé, plus $|T|$ est faible à fréquence fixée. Pour minimiser l'écart entre le diagramme réel et le diagramme asymptotique et donc réduire la variation du gain dans la bande passante, il convient de prendre une valeur légèrement supérieure à 0,707.

En définitive, en reprenant l'expression de Q , on obtient une relation entre R_1 et R_2 :

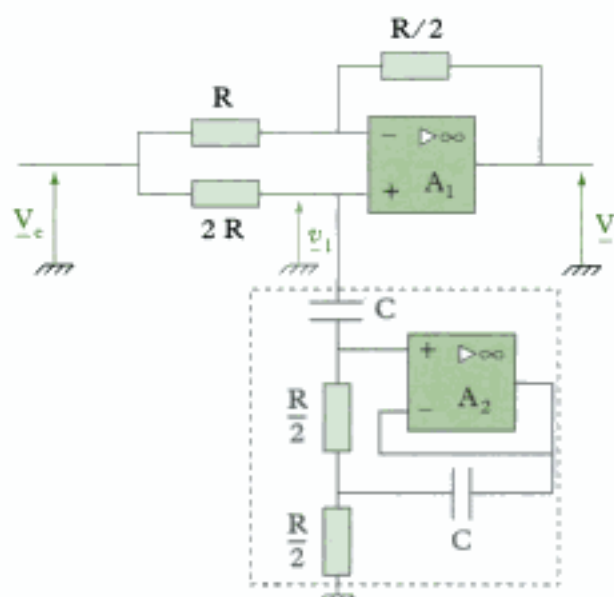
$$\frac{R_1}{R_2} \text{ légèrement supérieur à } 0,707$$

Remarque :

On pourrait également envisager le cas où $Q < \frac{1}{2}$ pour lequel T s'analyse comme le produit de deux fonctions de transfert de passe-bas d'ordre un. Dans ce cas, il existe deux pulsations de cassure dans le diagramme asymptotique. Dans la bande de fréquences limitée par la pulsation de coupure basse ω_B , l'ondulation est faible mais il convient de noter que dans un même temps $\omega_B < \omega_0$. Aussi, la comparaison avec l'étude précédente devient difficile. Disons que tout dépendra de la largeur de bande passante que l'on s'accorde.

Exercice 7

1)



On note Z l'impédance de la portion de circuit encadrée en traits pointillés ci-contre.

$$\underline{e}^+ = \frac{Z}{Z + 2R} \cdot \underline{V}_e = \underline{e}^- \quad (1) \text{ car } A_1 \text{ est idéal.}$$

$$\frac{\underline{V}_e - \underline{e}^-}{R} = \frac{\underline{e}^- - \underline{V}_s}{\frac{R}{2}} + \underline{i}^- = \frac{\underline{e}^- - \underline{V}_s}{\frac{R}{2}} \Leftrightarrow \underline{V}_e - \underline{e}^- = 2(\underline{e}^- - \underline{V}_s), \text{ donc : } \underline{V}_e = 3\underline{e}^- - 2\underline{V}_s, \quad (2).$$

Les relations (1) et (2) donnent :

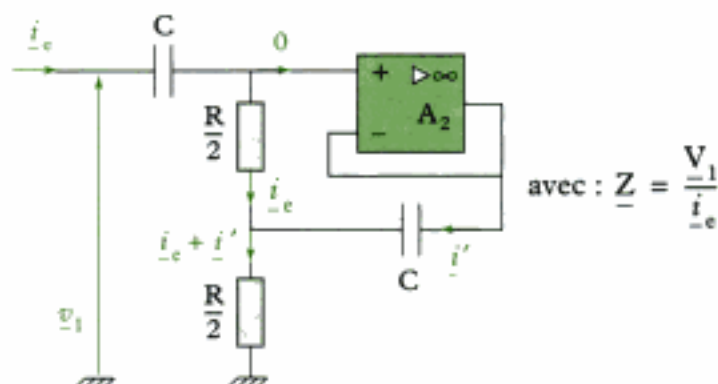
$$\underline{V}_e = \frac{3Z}{Z + 2R} \cdot \underline{V}_e - 2\underline{V}_s \Leftrightarrow \underline{V}_e \cdot \left(1 - \frac{3Z}{Z + 2R}\right) = -2\underline{V}_s.$$

$$\text{Donc : } \underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2R - 2Z}{Z + 2R}, \text{ soit :}$$

$$\underline{T} = \frac{Z - R}{Z + 2R} \quad (3)$$

Commentaire : il peut s'agir un filtre coupe-bande (ou réjecteur) si l'équation $\underline{Z} = R$ admet une solution physiquement acceptable ce que nous vérifierons *a posteriori* après calcul de \underline{Z} .

Déterminons \underline{Z} (cf. méthode n° 1) :



Ici : $\underline{i}_e = jC\omega \cdot (\underline{v}_1 - \underline{e}^+)$

$$\frac{1}{jC\omega} \cdot \underline{i}' = \frac{R}{2} \cdot \underline{i}_e \Rightarrow \underline{i}' = j\frac{R}{2}C\omega \cdot \underline{i}_e$$

donc : $\underline{e}^+ = \frac{R}{2} \cdot \underline{i}_e + \frac{R}{2} \cdot (\underline{i}_e + \underline{i}') = R \cdot \underline{i}_e + j\frac{R^2}{4}C\omega \cdot \underline{i}_e$

puis : $\underline{i}_e = jC\omega \cdot \underline{v}_1 - jC\omega R \cdot \left(1 + j\frac{R}{4}C\omega\right) \cdot \underline{i}_e \Leftrightarrow \underline{i}_e \cdot \left[1 + jRC\omega + \frac{1}{4}(jRC\omega)^2\right] = jC\omega \cdot \underline{v}_1$,

soit : $\underline{Z} = \frac{\underline{v}_1}{\underline{i}_e} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{4}R^2(jC\omega)$. En reportant dans (3), il vient :

$$\underline{T} = \frac{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{4}R^2jC\omega\right) - R}{\left(R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{4}R^2jC\omega\right) + 2R}$$

D'où :

$$\underline{T} = \frac{1 - \left(\frac{RC\omega}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{RC\omega}{2}\right)^2 + j3RC\omega}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre coupe-bande dont les paramètres ω_0 , Q (et m) s'obtiennent par identification avec la forme normalisée :

$$\begin{cases} \frac{RC}{2} = \frac{1}{\omega_0} \\ \frac{1}{Q \cdot \omega_0} = 3RC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{2}{RC} \\ Q = \frac{1}{6} = 0,17 \end{cases} \quad (m = 3)$$

2) En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on a :

$$\underline{T} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q \cdot (1 - x^2)}} \Rightarrow |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{Q^2 \cdot (1 - x^2)^2}}}$$

Donc : $G(\text{dB}) = 20\log|\underline{T}| = -10\log\left[1 + \frac{x^2}{Q^2 \cdot (1 - x^2)^2}\right]$.

- Si $x \rightarrow +\infty$ ($\log x \rightarrow +\infty$) : $G \rightarrow 0$ dB ;
- Si $x \rightarrow 0^+$ ($\log x \rightarrow -\infty$) : $G \rightarrow 0$ dB ;
- Si $x \rightarrow 1$: $G \rightarrow -\infty$.

Évaluons également la largeur de la bande coupée qui est l'intervalle des fréquences pour lesquelles

$$|T| \leq \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ On résout alors :}$$

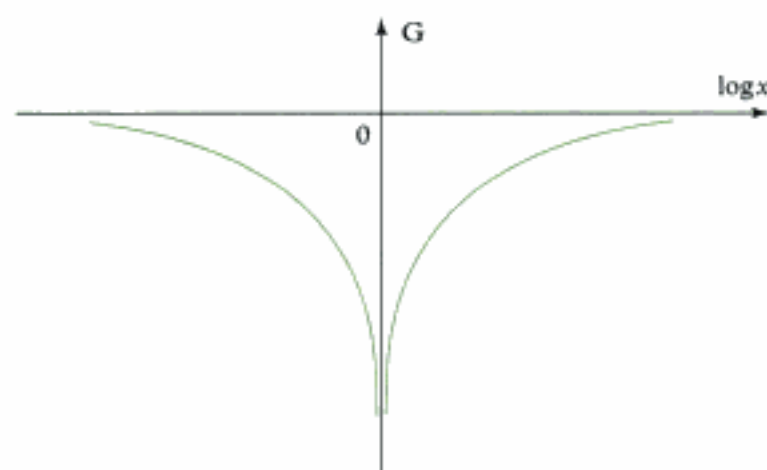
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{Q^2 \cdot (1-x^2)^2} = 1 &\Leftrightarrow x^2 - Q^2 \cdot (1-x^2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow [x - Q \cdot (1-x^2)] \cdot [x + Q \cdot (1-x^2)] = 0 \\ &\Leftrightarrow x - Q \cdot (1-x^2) = 0 \text{ ou } x + Q \cdot (1-x^2) = 0. \end{aligned}$$

La résolution de ces deux équations du second degré conduit à deux solutions physiquement acceptables, c'est-à-dire strictement positives :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \quad (x_2 > x_1) \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}, \text{ soit : } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = 6, \text{ donc :}$$

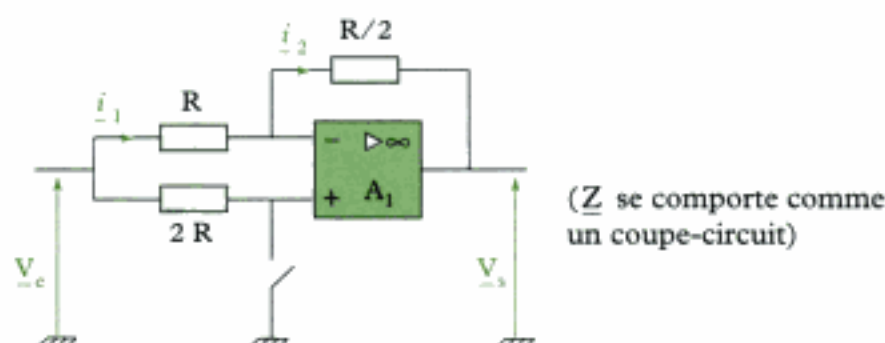
$$\Delta\omega = 6 \omega_0 = \frac{12}{RC}$$

Ce qui conduit au diagramme de Bode dont l'allure est donnée ci-dessous :



3) • En basses fréquences

$\omega \rightarrow 0$ et le schéma équivalent est le suivant :

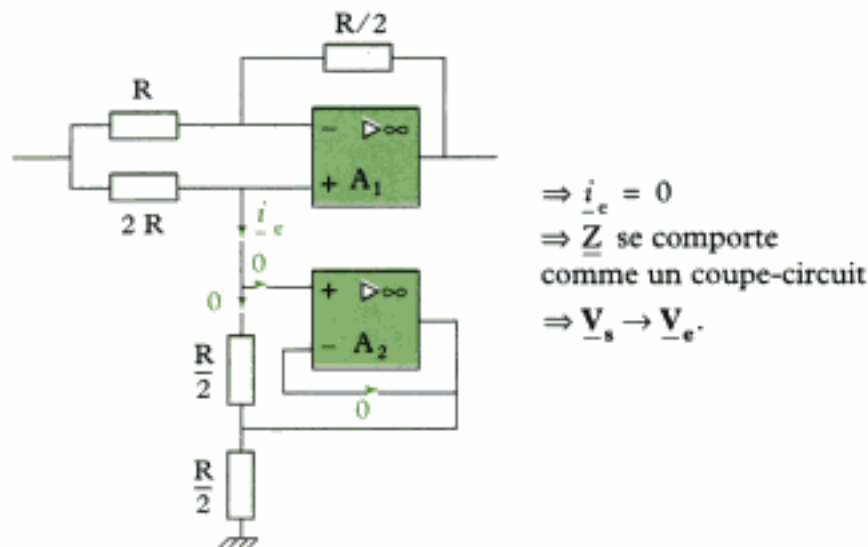


(Z se comporte comme un coupe-circuit)

$$e^+ \rightarrow \underline{V}_e \Rightarrow \underline{i}_1 = \underline{i}_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{V}_s \rightarrow \underline{V}_e.$$

• En hautes fréquences

$\omega \rightarrow +\infty$ et le schéma équivalent est le suivant :



4) a) Si $f = 3\,183$ Hz, on constate que l'amplitude du signal de sortie est très faible devant celle du signal d'entrée :

$$\frac{V_{e\max}}{V_{s\max}} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-7}} = 12,5 \cdot 10^5.$$

Soit une atténuation d'environ -122 dB.

L'étude précédente laisse penser qu'il s'agit de la **fréquence de réjection** du filtre, ce que l'on vérifie aisément :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{\pi RC} = 3\,183 \text{ Hz}.$$

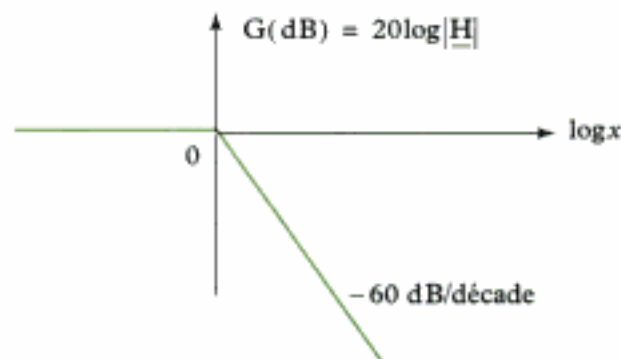
b) Si $f = 19\,614$ Hz, on peut à nouveau calculer le rapport des amplitudes :

$$\frac{V_{s\max}}{V_{e\max}} = \frac{0,707}{1} = 0,707 \text{ à rapprocher de } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On peut penser qu'il s'agit de la **fréquence de coupure haute**, ce qui se confirme en mesurant sur le chronogramme temporel le déphasage entre $V_s(t)$ et $V_e(t)$. On lit que $V_s(t)$ est en avance d'environ 47° sur $V_e(t)$. Cette valeur est voisine des 45° attendus.

Exercice 8

1) On commence par donner l'allure du diagramme de Bode du gain du filtre qui, d'après l'expression donnée pour $|H|$, est du troisième ordre et de type passe-bas (cf. méthode n° 2) :

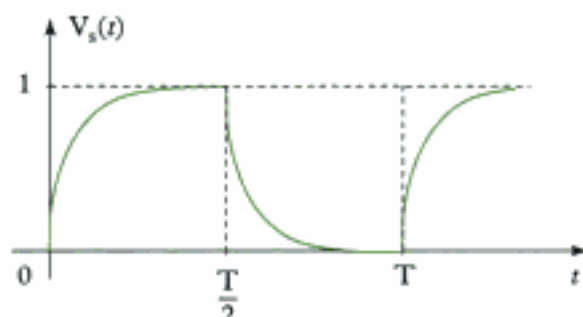


avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 955 \text{ Hz}.$

a) Si $T = 10 \text{ ms}$:

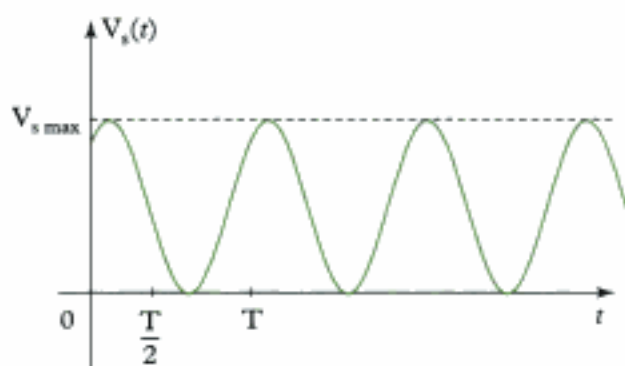
$$f = \frac{1}{T} = 100 \text{ Hz} = \frac{f_0}{10} \Rightarrow x = 0,1 \text{ ou } \log x = -1.$$

Outre la valeur moyenne de $V_e(t)$ qui est transmise, les harmoniques 3, 5, 7, 9 sont aussi situés dans la bande passante (le signal carré ne possède que des harmoniques de rang pair), ce qui permet de conclure que le signal est transmis en sortie sans trop de déformation sauf aux discontinuités :



b) Si $T = 1 \text{ ms}$, alors $f = 1 \text{ kHz} \approx f_0$.

Le filtre laisse passer la composante continue ; le fondamental est atténué d'environ 3 dB ($|H|(x=1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$) tandis que les harmoniques de rang supérieur sont très vite atténués. La pente de la bande coupée est très élevée (-60 dB/décade). Le signal de sortie est donc proche du fondamental :

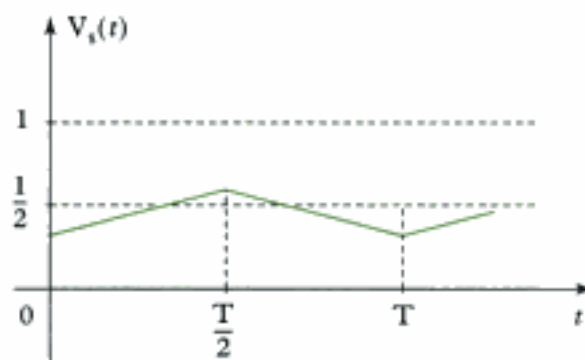


Remarque :

L'amplitude de $V_s(t)$ peut être déterminée si l'énoncé donne par exemple la série de Fourier de $V_e(t)$; le déphasage entre le fondamental de $V_e(t)$ et $V_s(t)$ se détermine à l'aide de $\underline{H}(j\omega)$ pour $\omega = \omega_0$.

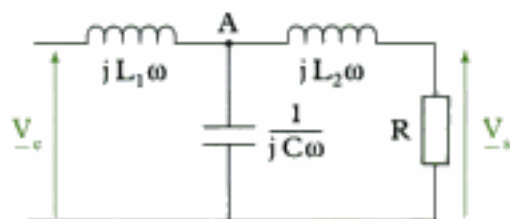
c) Si $T = 0,1 \text{ ms}$, alors $f = 10 \text{ kHz} \approx 10 f_0$.

Les harmoniques sont tous fortement atténués donc le signal est légèrement ondulé autour de sa valeur moyenne. Quant au filtre, il présente un caractère intégrateur, donc :



2) On commence par appliquer le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_e}{jL_1\omega} + \frac{\underline{V}_s}{jL_2\omega}}{\frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega}}$$



Le diviseur de tension donne :

$$\underline{V}_s = \frac{R}{R + jL_2\omega} \cdot \underline{V}_A, \text{ donc : } \left(jC\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} \right) \cdot \frac{R + jL_2\omega}{R} \cdot \underline{V}_s = \frac{\underline{V}_e}{jL_1\omega} + \frac{\underline{V}_s}{jL_2\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V}_s \cdot \left[\left(1 + j\frac{L_2\omega}{R} \right) \cdot \left(jC\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} \right) - \frac{1}{jL_2\omega} \right] = \frac{\underline{V}_e}{jL_1\omega}$$

Pour obtenir la forme proposée par l'énoncé pour \underline{H} , on cherche à regrouper les termes réels et les termes imaginaires purs :

$$\left[\left(1 + j\frac{L_2\omega}{R} \right) \cdot \left(jC\omega + \frac{1}{jL_1\omega} + \frac{1}{jL_2\omega} \right) - \frac{1}{jL_2\omega} \right] \cdot jL_1\omega = 1 - L_1C\omega^2 + j\omega \cdot \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} - \frac{L_1L_2C\omega^2}{R} \right)$$

Le carré du module de cette quantité s'écrit :

$$(1 - L_1C\omega^2) + \omega^2 \cdot \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} - \frac{L_1L_2C\omega^2}{R} \right)^2 = 1 - 2L_1C\omega^2 + (L_1C)^2 \cdot \omega^4 + \omega^2 \cdot \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right)^2$$

$$- 2\omega^2 \cdot \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right) \cdot \frac{L_1L_2C\omega^2}{R} + \left(\frac{L_1L_2C}{R} \right)^2 \cdot \omega^6$$

Il est donc possible d'obtenir $|\underline{H}| = \frac{|\underline{V}_s|}{|\underline{V}_e|} = \frac{1}{\sqrt{1+x^6}}$ si les termes en ω^2 , ω^4 sont nuls et si

$\left(\frac{L_1L_2C}{R} \right)^2 \cdot \omega^6$ est égal à x^6 . Ce qui conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right)^2 - 2L_1C = 0 & (1) \\ (L_1C)^2 - 2\left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right) \cdot \frac{L_1L_2C}{R} = 0 & (2) \\ \left(\frac{L_1L_2C}{R} \right)^2 = \frac{1}{\omega_0^6} & (3) \end{cases}$$

Commençons par exprimer ω_0 :

$$(3) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt[3]{\frac{R}{L_1L_2C}}$$

Puis exprimons L_1 et L_2 en fonction de R et C :

$$(2) \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right) \cdot \frac{L_2}{R} = L_1C$$

En reportant dans (1), il vient :

$$\left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right)^2 = 2 \times 2 \cdot \left(\frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} \right) \cdot \frac{L_2}{R} \Rightarrow \frac{L_1}{R} + \frac{L_2}{R} = \frac{4L_2}{R}$$

Soit : $L_1 = 3L_2$, donc : $\frac{3L_2}{R} + \frac{L_2}{R} = \frac{RC}{2} \times \frac{L_1}{L_2} = \frac{3}{2}RC$, ainsi :

$$L_2 = \frac{3}{8}R^2C \text{ et } L_1 = \frac{9}{8}R^2C$$

Exercice 9

1) • Fonction de transfert

On commence par étudier chaque montage A.O. :

- $\underline{u}_s = -\underline{u}_2$ (montage inverseur)
- $\underline{u}_1 = -\frac{1}{jRC\omega} \cdot \underline{u}_s$ (montage intégrateur).

La tension \underline{u}_2 est la tension de sortie d'un montage sommateur inverseur d'entrées \underline{u}_e et \underline{u}_1 avec :

$$\underline{u}_2 = -\frac{Z}{R} \cdot \underline{u}_e - \frac{Z}{R_2} \cdot \underline{u}_1 \quad \text{où} \quad Z = \frac{R \left(\frac{1}{jC\omega} \right)}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

La combinaison de ces relations conduit à :

$$\underline{u}_2 = -\underline{u}_s = -\frac{\underline{u}_e}{1 + jRC\omega} + \frac{1}{jR_2C\omega} \cdot \left(\frac{\underline{u}_s}{1 + jRC\omega} \right) \Leftrightarrow \underline{u}_e = \underline{u}_s \cdot \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{jR_2C\omega} \right)$$

$$\text{Soit : } \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + RC \cdot (j\omega) + \frac{1}{R_2C} \cdot \left(\frac{1}{j\omega} \right)}$$

Cette fonction de transfert s'écrit donc bien sous la forme $\frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$ si on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et :

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ \frac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q \cdot \omega_0 = \frac{1}{R_2C} \end{cases}$$

soit :

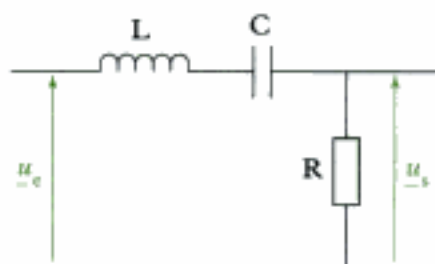
$$H_0 = 1 ; \quad Q = \sqrt{\frac{R}{R_2}} ; \quad \omega_0 = \frac{Q}{RC} = \frac{1}{C \sqrt{RR_2}}$$

D'après la forme normalisée de \underline{H} , il s'agit d'un **filtre passe-bande du second ordre**. Il sélectionne

la bande de fréquences centrée autour de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot C \sqrt{RR_2}}$.

• Comment obtenir ce filtre à partir de composants passifs et d'un montage simple ?

Il s'agit de trouver un filtre passe-bande passif dont on sait qu'il doit comporter les trois dipôles R, L et C. En effectuant l'étude asymptotique, on obtient ainsi :



• Quel est l'avantage du montage à A.O. ?

L'adaptation d'impédance en entrée et en sortie du montage (indépendance avec les autres étages).

2) On utilise la méthode n° 2.

• Pour le tracé du gain $G = |\underline{H}(j\omega)|$, nous avons tracé $G(x)$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et en prenant $Q = 5$ ce qui correspond au cas d'un filtre sélectif.

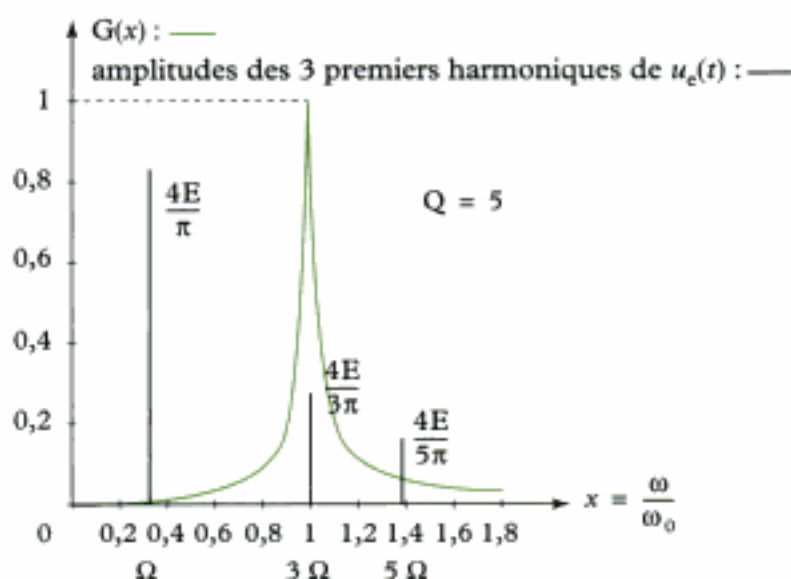
• Pour le tracé du spectre du signal d'entrée, il faut analyser la représentation de l'harmonique de la tension de sortie fournie dans l'énoncé. Sa fréquence est égale à 3 fois celle de $u_e(t)$: il s'agit donc de l'harmonique de rang 3. De plus, son amplitude est égale à 42 % de E ce que l'on peut comparer au coefficient de cet harmonique donné par la série de Fourier de $u_e(t)$: $\left| -\frac{4E}{3\pi} \right| = 42\%$ de E. La comparaison des deux amplitudes montre que le gain G pour cet harmonique est égal à 1, avec :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$



L'amplitude étant une grandeur positive, on doit prendre la valeur absolue du coefficient de la série de Fourier pour cet harmonique.

Toutes ces remarques conduisent à la conclusion que ω_0 se confond ici avec la pulsation de l'harmonique de rang 3 c'est-à-dire 3Ω . Cette étude est ainsi résumée sur le graphique suivant (qui correspond à la représentation donnée dans le cours en figure 25) :



3) Harmonique 1 (fondamental)

Puisque $\omega_0 = 3\Omega$, la fréquence du fondamental correspond à la pulsation $\Omega = \frac{\omega_0}{3}$ soit :

$$F_1 = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{6\pi}$$



Le système étudié étant linéaire, le signal de sortie a la même fréquence que le signal d'entrée s'il est sinusoïdal.

L'amplitude de l'harmonique 1 est obtenue grâce à la série de Fourier du signal d'entrée et à l'expression de G pour $\omega = \Omega$:

$$U_{1_{\max}} = \frac{4E}{\pi} \cdot G(\Omega) = \frac{4E}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2}} \text{ avec } \Omega = \frac{\omega_0}{3},$$

donc :
$$U_{1_{\max}} = \frac{\frac{4E}{\pi}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{1}{3} - 3\right)^2}} \Rightarrow U_{1_{\max}} = \frac{\frac{4E}{\pi}}{\sqrt{1 + \frac{64}{9}Q^2}}$$

• On procède de même pour les deux harmoniques suivants, ce qui conduit à :

– Harmonique 3 :
$$F_3 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{et} \quad U_{3_{\max}} = \frac{4E}{\pi}$$

– Harmonique 5 :
$$F_5 = 5F_1 = \frac{5\omega_0}{6\pi} \quad \text{et} \quad U_{5_{\max}} = \frac{\frac{4E}{5\pi}}{\sqrt{1 + \frac{256}{225} \cdot Q^2}}$$

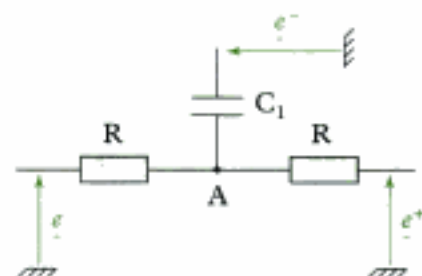
Exercice 10

1) • **Fonction de transfert \underline{H}_1** (cf. méthode n° 1)

On applique le théorème de Millman au point A :

$$\underline{V}_A = \frac{jC_1\omega \cdot \underline{e}^- + \frac{\underline{e}^+}{R} + \frac{\underline{e}^-}{R}}{jC_1\omega + \frac{2}{R}} \quad \text{avec} \quad \underline{e}^+ = \underline{e}^- = \underline{s}_1$$

$$\Rightarrow \underline{V}_A = \frac{\left(jC_1\omega + \frac{1}{R}\right) \cdot \underline{s}_1 + \frac{\underline{e}}{R}}{jC_1\omega + \frac{2}{R}} \quad (1)$$



et en utilisant le diviseur de tension :

$$\underline{e}^+ = \underline{s}_1 = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_2\omega} + R} \cdot \underline{V}_A = \frac{\underline{V}_A}{1 + jR_2C\omega} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$(1 + jRC_2\omega) \cdot \underline{s}_1 = \frac{\left(jC_1\omega + \frac{1}{R}\right) \cdot \underline{s}_1 + \frac{\underline{e}}{R}}{jC_1\omega + \frac{2}{R}}$$

$$\Leftrightarrow (1 + jRC_2\omega) \cdot \left(jC_1\omega + \frac{2}{R}\right) \cdot \underline{s}_1 = \left(jC_1\omega + \frac{1}{R}\right) \cdot \underline{s}_1 + \frac{\underline{e}}{R}$$

d'où on déduit :

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{s}_1}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + 2RC_2(j\omega) + R^2C_1C_2(j\omega)^2}$$

Il s'agit d'un **filtre passe-bas du second ordre**.

• **Fonction de transfert \underline{H}_2**



Au lieu de mener un nouveau calcul, il suffit de faire l'analogie avec l'étude qui a donné \underline{H}_1 :

$$R \rightarrow \frac{1}{jC\omega} ; \frac{1}{jC_1\omega} \rightarrow R_1 ; \frac{1}{jC_2\omega} \rightarrow R_2$$

D'où :

$$\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{jC\omega}\right) \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(jC\omega)^2} \cdot \frac{1}{R_1 R_2}}$$

$$\underline{H}_2 = \frac{R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2}{1 + 2R_1 C (j\omega) + R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2}$$

Il s'agit d'un **filtre passe-haut du second ordre**.

2) Le filtre amont (passe-bas) peut se modéliser par un générateur de tension parfait à sa sortie (revoir paragraphe A. 7. 5. du chapitre précédent). Ainsi :

$$\underline{s}_1 = \underline{H}_1 \cdot \underline{e} \text{ avec } \underline{s} = \underline{H}_2 \cdot \underline{s}_1$$

$$\text{donc : } \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 = \frac{R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2}{[1 + 2R_1 C_2 (j\omega) + R^2 C_1 C_2 (j\omega)^2] \cdot [1 + 2R_1 C (j\omega) + R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2]}$$

$$\underline{H} = \frac{R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2}{[1 + 2RC_2 (j\omega) + R^2 C_1 C_2 (j\omega)^2] \cdot [1 + 2R_1 C (j\omega) + R_1 R_2 C^2 (j\omega)^2]}$$

\underline{H} représente la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre de pulsation propre :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

tandis que \underline{H}_2 représente la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du second ordre et de pulsation propre :

$$\omega'_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$$

Le montage complet est donc un **filtre passe-bande**, de bande passante limitée par ω_0 et ω'_0 , et d'ordre 4.

3) Les diagrammes de Bode de \underline{H} s'obtiennent aisément à partir de ceux de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 car :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 \Rightarrow \begin{cases} G_{dB} = G_{1,dB} + G_{2,dB} \\ \text{Arg}(\underline{H}) = \varphi = \text{Arg}(\underline{H}_1) + \text{Arg}(\underline{H}_2) = \varphi_1 + \varphi_2 \end{cases}$$

On commence donc par représenter les diagrammes asymptotiques de \underline{H}_1 et \underline{H}_2 pour en déduire ceux de \underline{H} .

Calculons également $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ et $f'_0 = \frac{\omega'_0}{2\pi}$:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \times \sqrt{7 \cdot 10^{-9} \times 3,5 \cdot 10^{-9}}} = 3\,215 \text{ Hz};$$

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi C\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{1}{2\pi \times 47 \cdot 10^{-9} \times \sqrt{8 \cdot 10^3 \times 16 \cdot 10^3}} = 299 \text{ Hz}.$$

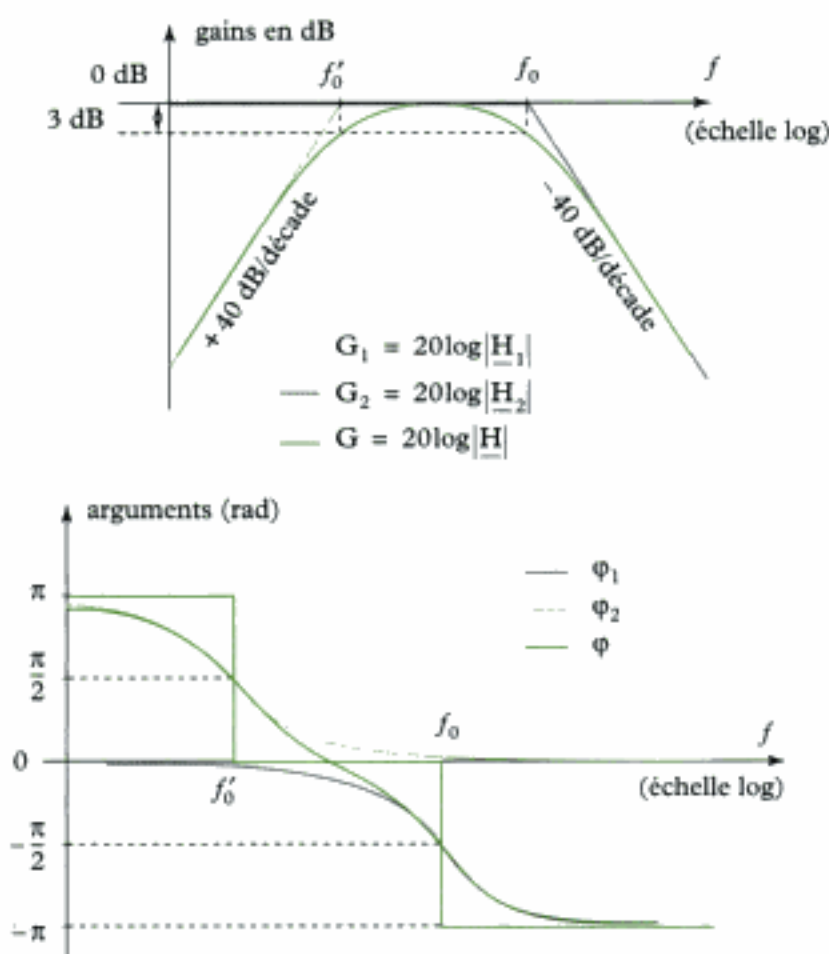
Pour représenter les diagrammes réels, il faut déterminer la valeur numérique du facteur d'amortissement (ou bien du facteur de qualité) pour \underline{H}_1 et \underline{H}_2 :

$$\bullet \text{ pour } \underline{H}_1 : \frac{2m}{\omega_0} = 2RC_2 \Rightarrow m = RC_2\omega_0 = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt{\frac{3,5}{7}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\bullet \text{ pour } \underline{H}_2 : \frac{2m'}{\omega'_0} = 2R_1 C \Rightarrow m' = R_1 C\omega'_0 = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{8}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Les diagrammes réels du gain sont ainsi situés sous le diagramme asymptotique avec un écart de 3 dB à la pulsation de coupure (revoir le cours du chapitre 2 pour plus de précisions).

Enfin, on remarque que $\frac{f'_0}{f_0} = 0,1$, ce qui permet de tracer avec une bonne approximation les deux diagrammes réels indépendamment, puis d'additionner point par point.



Commentaires :

– L'intervalle [300 ; 3 200 Hz] de la bande passante du filtre englobe celle de l'oreille humaine qui s'étend de quelques Hz à 15-20 kHz. **Il peut être utilisé en réception téléphonique.**

– **Le filtre est assez sélectif en dehors de la bande passante** puisque les bandes atténuées sont de pente ± 40 dB/décade.

– Un signal appliqué à l'entrée du filtre et dont la fréquence appartient à la bande passante est correctement transmis en amplitude mais il subit dans le même temps un déphasage ϕ qui dépend de la fréquence, avec ϕ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On parle de **distorsion de phase**.

Exercice 11

1) On reconnaît une structure de montage inverseur pour lequel la fonction de transfert s'écrit ici :

$$\underline{H} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

$$\text{avec } \underline{Z}_1 = R_1 \text{ et } \underline{Z}_2 = R_3 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{jC_2\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}}$$

$$\text{D'où : } \underline{H} = -\frac{1}{R_1} \cdot \left[R_3 + \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega} \right] = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_3(1 + jR_2C\omega) + R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \cdot \frac{1 + j \frac{R_2 R_3 C \omega}{R_2 + R_3}}{1 + jR_2C\omega}$$

Posons :

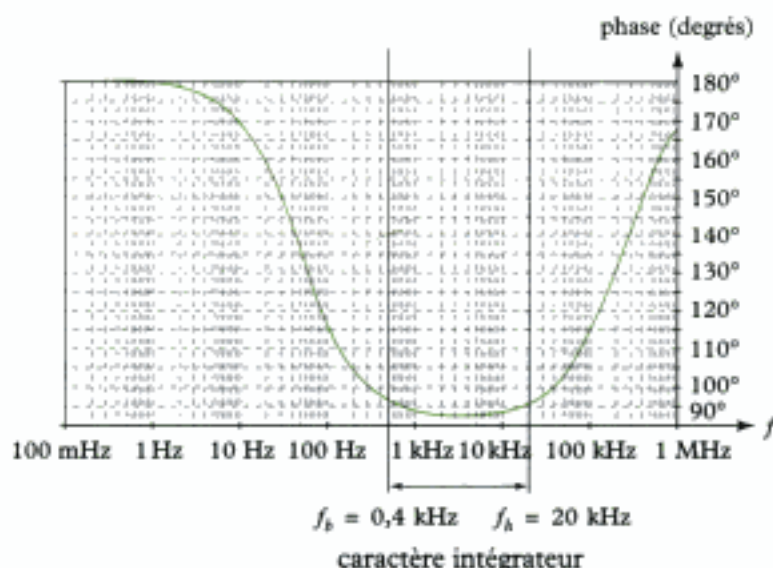
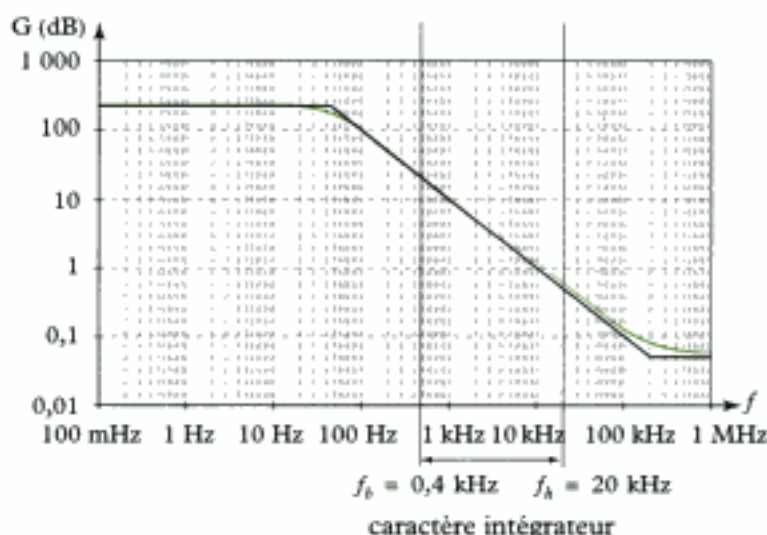
$$f_{c_1} = \frac{R_2 + R_3}{2\pi R_2 R_3 C} = \frac{220 \cdot 10^3 + 47}{2\pi \times 220 \cdot 10^3 \times 47 \times 15 \cdot 10^{-9}} = 226 \text{ kHz}$$

$$f_{c_2} = \frac{1}{2\pi R_2 C} = \frac{1}{2\pi \times 220 \cdot 10^3 \times 15 \cdot 10^{-9}} = 48 \text{ Hz.}$$

On peut tracer rapidement le diagramme de Bode du gain en remarquant que \underline{H} se décompose selon :

$$\underline{H} = \underbrace{-\frac{R_2 + R_3}{R_1}}_{\text{constante}} \times \underbrace{\left(1 + j \frac{f}{f_{c_1}}\right)}_{\text{passe-haut du 1^{er} ordre}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1 + j \frac{f}{f_{c_2}}}\right)}_{\text{passe-bas du 1^{er} ordre}}$$

On donne ci-dessous le diagramme correspondant :



2) • Observations

- (1) : $e(t)$ et $s(t)$ ont **même fréquence** ;
- (2) : $s(t)$ est **quasi-triangulaire** (on peut observer une très *légère distorsion* lors des commutations du signal d'entrée) ;
- (3) : $s(t)$ est à valeur **moyenne nulle**.

• Interprétations (cf. méthode n° 2)

- (1) : le système est **linéaire** ;
- (2) : d'après les diagrammes de Bode et le spectre, on constate que les harmoniques de $e(t)$ d'amplitude significative sont situés **dans la bande de fréquences [1 kHz, 10 kHz]** sur laquelle le **montage présente un caractère intégrateur** (la phase est voisine de 90° à 5° près sur cette bande de fréquences). Il est donc logique d'obtenir un signal d'allure triangulaire.



Pour ce qui est de la distorsion aux voisinages des commutations, nous le justifierons à la question suivante.

- (3) : puisque **la moyenne du signal d'entrée est nulle**, il en est **de même pour le signal de sortie**.

3) • Observations

Comparativement au cas précédent, **la distorsion du signal de sortie est accentuée lors des changements d'état de la tension $e(t)$** .

• Interprétation (cf. méthode n° 2)

Le fondamental de $e(t)$ de fréquence $f = 15$ kHz est toujours situé dans la zone d'intégration. En revanche, l'harmonique de rang immédiatement supérieur n'y est déjà plus (ici de rang 3 donc à 45 kHz). Ainsi les harmoniques du signal d'entrée de rang élevé ne sont pas « intégrés » et par contre fortement atténués.

Or ceux-ci correspondent, dans le domaine temporel, aux changements d'état de $e(t)$.

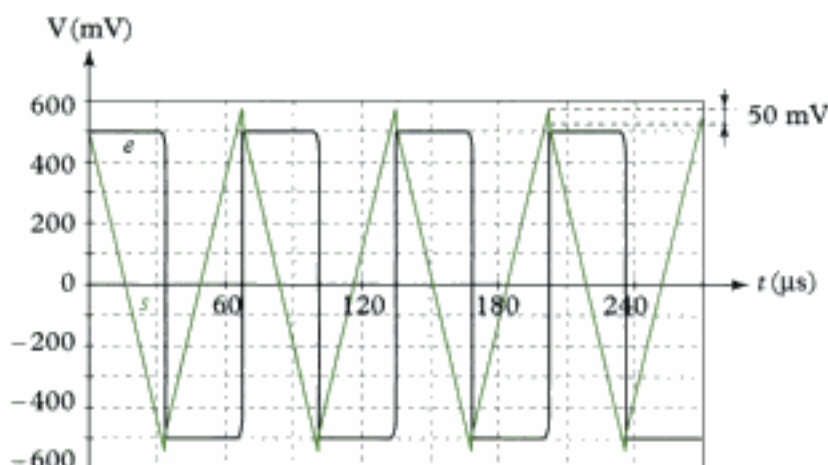
On peut d'ailleurs faire un calcul pour s'en convaincre. En hautes fréquences, $\underline{H}(j\omega)$ s'écrit en effet :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \cdot \frac{f_{c_2}}{f_{c_1}}$$

Soit une amplification des hautes fréquences qui vaut numériquement :

$$\left| -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \cdot \frac{f_{c_2}}{f_{c_1}} \right| = 0,27.$$

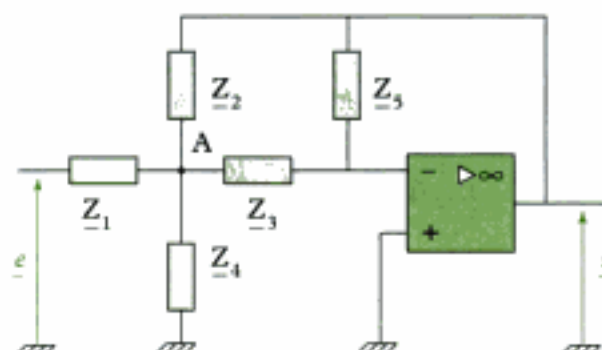
Le chronogramme temporel montre effectivement que pour une variation d'amplitude de $e(t)$ égale à $2E = 1$ V, on mesure un saut de tension en sortie voisin de 50 mV, ce qui est en accord avec le résultat du calcul :



Exercice 12

• Commentaire

Ce type de filtre correspond à la structure dite « de Rauch » qui se présente selon :



• Détermination de la fonction de transfert (cf. méthode n° 1)

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{e^-}{R_1} + \frac{0}{R} + jC\omega \cdot e^- + jC\omega \cdot s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega} \quad (\text{avec } e^- = 0) \Leftrightarrow \underline{V}_A = \frac{\frac{e^-}{R_1} + jC\omega \cdot s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega} \quad (1)$$

$$\text{et } e^- = 0 = \frac{jC\omega \cdot \underline{V}_A + \frac{s}{R_2}}{jC\omega + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow \underline{V}_A = -\frac{s}{jR_2C\omega} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent :

$$\begin{aligned} -\frac{s}{jR_2C\omega} &= \frac{\frac{e^-}{R_1} + jC\omega \cdot s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega} \Leftrightarrow -\frac{s}{jR_2C\omega} \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega \right) - jC\omega \cdot s = \frac{e^-}{R_1} \\ \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{s}{e^-} &= -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{jR_2C\omega}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + 2jC\omega + R_2C^2(j\omega)^2} \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= -\frac{jR_2C\omega}{1 + \frac{R_1}{R} + 2jR_1C\omega + R_1R_2C^2(j\omega)^2} \end{aligned}$$

soit :

$$\underline{H} = -\frac{R}{R + R_1} \cdot \frac{jR_2C\omega}{1 + 2\frac{RR_1C}{R + R_1}(j\omega) + \frac{RR_1R_2C^2}{R + R_1}(j\omega)^2}$$

• Nature du filtre et paramètres caractéristiques

On peut identifier cette expression à la forme normalisée d'un filtre passe-bande du second ordre, si on pose :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{RR_1R_2C^2}{R + R_1} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi C} \cdot \sqrt{\frac{R + R_1}{RR_1R_2}}$$

$$\frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{2RR_1C}{R+R_1} \Rightarrow Q = \frac{R+R_1}{2RR_1C} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{R+R_1}{2RR_1C} \cdot C \sqrt{\frac{RR_1R_2}{R+R_1}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_2(R+R_1)}{2RR_1}}$$

$$\frac{H_0}{\omega_0} = -\frac{R}{R+R_1} \cdot R_2C \Rightarrow H_0 = -\frac{RR_2C}{R+R_1} \times \frac{1}{C} \sqrt{\frac{R+R_1}{RR_1R_2}}$$

$$H_0 = -\sqrt{\frac{RR_2}{R_1(R+R_1)}}$$

$$\text{avec : } \underline{H}(j\omega) = H_0 \cdot \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q\omega_0} \cdot (j\omega) + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

• Application numérique pour $100 \, \Omega \leq R \leq 10 \, \text{k}\Omega$

– Calcul de f_0 (f_0 est une fonction décroissante de R) :

$$\text{si } R = 10 \, \text{k}\Omega : f_0 = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8}} \sqrt{\frac{10^5 + 10^4}{10^4 \times 10^5 \times 10^6}} = 167 \, \text{Hz}$$

$$\text{si } R = 100 \, \Omega : f_0 = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8}} \sqrt{\frac{10^5 + 100}{100 \times 10^5 \times 10^6}} = 1\,592 \, \text{Hz}$$

– Calcul de Q (et de m) :

$$\text{Si } R = 10 \, \text{k}\Omega : Q = \sqrt{\frac{10^6 \times (10^4 + 10^5)}{2 \times 10^4 \times 10^5}} = 7,42 \left(m = \frac{1}{2Q} = 0,674 \right).$$

$$\text{Si } R = 100 \, \Omega : Q = \sqrt{\frac{10^6 \times (100 + 10^5)}{2 \times 100 \times 10^5}} = 70,7 \left(m = 0,707 \right).$$

– Calcul de H_0 :

$$\text{Si } R = 10 \, \text{k}\Omega : H_0 = -\sqrt{\frac{10^4 \times 10^6}{10^5 \times (10^4 + 10^5)}} = -0,95.$$

$$\text{Si } R = 100 \, \Omega : H_0 = -\sqrt{\frac{100 \times 10^6}{10^5 \times (100 + 10^5)}} = -0,01.$$

• Commentaire des résultats obtenus

Calculons la largeur de la bande passante Δf avec :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

$$\text{soit : } \Delta f = \frac{1}{2\pi C} \cdot \sqrt{\frac{R+R_1}{RR_1R_2}} \cdot \sqrt{\frac{2RR_1}{R_2(R+R_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi R_2 C}$$

On constate que la bande passante ne dépend pas de la valeur de R ce qui est une commodité très intéressante pour un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est quant à elle ajustable grâce à R .

A.N. : $\Delta f = 22,5 \, \text{Hz}$.

De surcroît, la largeur de la bande passante est limitée même si, à basses fréquences (f voisine de $f_{0\min} = 167 \, \text{Hz}$), la sélectivité n'est pas très bonne...

2) La réponse découle des commentaires effectués en fin de question précédente. Le filtre permet en effet de sélectionner tout harmonique du signal d'entrée dont la fréquence se situe sur l'intervalle [167 Hz ; 1 592 Hz]. La sélection de chaque harmonique est réalisée par l'ajustement de la valeur de la résistance variable R.

3) a) Il faut ajuster R pour sélectionner ces deux harmoniques avec :

• Pour le fondamental :

$$f_0 = f = \frac{1}{2\pi C} \cdot \sqrt{\frac{R+R_1}{RR_1R_2}}$$

$$\Leftrightarrow 4\pi^2 C^2 f^2 = \frac{1}{R_1R_2} + \frac{R_1}{RR_1R_2} = \frac{1}{R_1R_2} + \frac{1}{RR_2}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{4\pi^2 R_2 C^2 f^2 - \frac{1}{R_1}}$$



On vérifie que $f = 200$ Hz appartient à l'intervalle [167 Hz ; 1 592 Hz].

$$\text{A.N. : } R = \frac{1}{4\pi^2 \times 10^6 \times (10^{-8})^2 \times 200^2 - \frac{1}{10^5}} = 6,76 \text{ k}\Omega.$$

• Pour l'harmonique de rang 3 :

$f_0 = 3f$, ce qui conduit à :

$$R = \frac{1}{36\pi^2 \cdot R_2 C^2 \cdot f^2 - \frac{1}{R_1}}$$

$$\text{A.N. : } R = 709 \Omega.$$

b) Commençons par exprimer \underline{H} pour $\omega = \omega_0$:

$$\underline{H}(j\omega_0) = H_0 \cdot \frac{j}{1 + \frac{j}{Q} + j^2} = Q \cdot H_0 = \sqrt{\frac{R_2(R+R_1)}{2RR_1}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{RR_2}{R_1(R+R_1)}} \right).$$

$$\text{Soit : } \underline{H}(j\omega_0) = -\frac{R_2}{R_1\sqrt{2}}.$$

$$\text{A.N. : } \underline{H}(j\omega_0) = -\frac{10^6}{10^5 \times \sqrt{2}} = -7,1.$$

Commentaire :

Là aussi, il s'agit d'une propriété particulièrement intéressante pour effectuer l'analyse du signal d'entrée, puisque l'on constate que **le gain du filtre est identique** quelle que soit la valeur de R donc **pour tout harmonique**. Il est donc possible de faire une comparaison directe des niveaux de tension en sortie pour chaque harmonique sélectionné.

• Pour le fondamental : ($k = 0$)

$$\text{en entrée : } e_1(t) = \frac{4E_m}{\pi} \cdot \sin(2\pi ft) = \frac{4E_m}{\pi} \cdot \sin(400\pi t)$$

$$\Rightarrow \text{en sortie : } s_1(t) = -\frac{4R_2}{\pi\sqrt{2}R_1} \cdot E_m \cdot \sin(400\pi t)$$

$$= -9E_m \cdot \sin(400\pi t)$$



Le signe négatif de l'amplitude de $s_1(t)$ peut s'interpréter en disant que $s_1(t)$ est en opposition de phase avec $e_1(t)$.

- Pour l'harmonique 3 : ($k = 1$)

en entrée : $e_3(t) = \frac{4E_m}{3\pi} \cdot \sin(1\,200\pi t)$

\Rightarrow en sortie :

$$\begin{aligned} s_3(t) &= -\frac{4R_2 E_m}{3\pi(\sqrt{2}R_1)} \cdot \sin(1\,200\pi t) \\ &= -3E_m \cdot \sin(1\,200\pi t) \end{aligned}$$

Exercices de niveau 3

Exercice 13

- 1) • Expression de $u_1(t)$ avec $\tau = rC \ll \frac{T}{2}$

D'après la loi des mailles :

$$e_1 = rC \cdot \frac{du_1}{dt} + u_1 \quad (\text{position (1)}).$$

La résolution de l'équation différentielle précédente conduit à :

$$u_1(t) = e_1 + \lambda \cdot e^{-\frac{t-nT_c}{\tau}} \quad (2)$$

où λ est une constante d'intégration à déterminer avec les conditions initiales. Or ici $\tau \ll \frac{T}{2}$ donc la tension $u(t)$ est égale à e_2 avant la commutation ayant lieu à l'instant $t = nT_c$.

Enfin, la tension $u(t)$ étant continue à chaque instant on a :

$$u_1(nT_c) = u_2(nT_c) \quad \text{avec} \quad u_2(nT_c) = e_2.$$

La relation (2) donne :

$$e_2 = e_1 + \lambda \Rightarrow \lambda = e_2 - e_1$$

donc :

$$u_1(t) = e_1 + (e_2 - e_1) \cdot e^{-\frac{t-nT_c}{\tau}} \quad (a)$$

- Expression de $u_2(t)$ avec $\tau \ll \frac{T}{2}$

De même, l'équation différentielle s'écrit ici :

$$e_2 = rC \cdot \frac{du_2}{dt} + u_2 \quad (\text{position (2)})$$

d'où :

$$u_2(t) = e_2 + \lambda \cdot e^{-\frac{t-(n+\frac{1}{2})T_c}{\tau}}$$

avec :

$$u_2\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)T_c\right) = e_1 = e_2 + \lambda$$

donc :

$$u_2(t) = e_2 + (e_1 - e_2) \cdot e^{-\frac{t-(n+\frac{1}{2})T_c}{\tau}} \quad (b)$$

2) • Valeurs instantanées des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$

– pour $i_1(t)$:

si $nT_c \leq t < (n + \frac{1}{2})T_c$: $i_1(t) = C \cdot \frac{du_1}{dt}$, avec d'après (a) :

$$i_1(t) = C \cdot \frac{e_1 - e_2}{\tau} \cdot e^{-\frac{t - nT_c}{\tau}} = \frac{e_1 - e_2}{r} \cdot e^{-\frac{t - nT_c}{\tau}}$$

sinon $i_1(t) = 0$.

– pour $i_2(t)$:

si $(n + \frac{1}{2})T_c \leq t < (n + 1)T_c$: $i_2(t) = C \cdot \frac{du_2}{dt}$, avec d'après (b) :

$$i_2(t) = \frac{e_2 - e_1}{r} \cdot e^{-\frac{t - (n + \frac{1}{2})T_c}{\tau}}$$

sinon $i_2(t) = 0$.

• Valeurs moyennes de $i_1(t)$ et $i_2(t)$

– pour $i_1(t)$:

$$\langle i_1 \rangle = \frac{1}{T_c} \cdot \int_{nT_c}^{(n + \frac{1}{2})T_c} i_1(t) \cdot dt = \frac{1}{T_c} \cdot \int_{nT_c}^{(n + \frac{1}{2})T_c} C \cdot \frac{du_1}{dt} \cdot dt = \frac{C}{T_c} [u_1]_{nT_c}^{(n + \frac{1}{2})T_c}$$

avec :

$$u_1\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)T_c\right) = e_1 \text{ et } u_1(nT_c) = e_2$$

donc :

$$\langle i_1 \rangle = \frac{C \cdot (e_1 - e_2)}{T_c}$$

– pour $i_2(t)$:

$$\langle i_2 \rangle = \frac{1}{T_c} \int_{(n + \frac{1}{2})T_c}^{(n + 1)T_c} i_2(t) \cdot dt = \frac{C}{T_c} \cdot [u_2]_{(n + \frac{1}{2})T_c}^{(n + 1)T_c}$$

avec :

$$u_2((n + 1)T_c) = e_2 \text{ et } u_2(nT_c) = e_1$$

donc :

$$\langle i_2 \rangle = \frac{C \cdot (e_2 - e_1)}{T_c}$$

3) • Équivalence du dipôle entre les points A et B

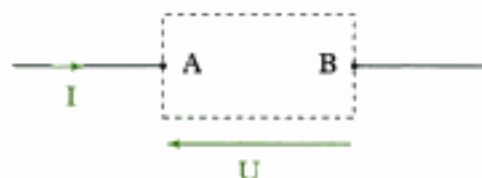
Formellement, la portion de circuit se comporte comme un dipôle traversé par le courant moyen $I = \langle i_1 \rangle - \langle i_2 \rangle$ et soumis à la tension $U = e_1 - e_2$.

On peut donc définir une résistance R_e équivalente entre les points A et B telle que :

$$R_e = \frac{U}{I}$$

• Expression de R_e en fonction de C et f_c

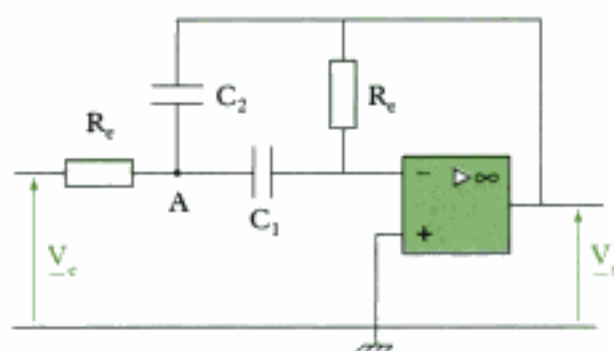
$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{e_1 - e_2}{\langle i_1 \rangle - \langle i_2 \rangle} = \frac{T_c}{2C} = \frac{1}{2Cf_c}$$



4) Si $f_c \gg f$, on peut alors négliger les variations de $e_1(t)$ et $e_2(t)$ au cours d'une période de commutation T_c . Le circuit se comporte donc toujours comme un dipôle de résistance équivalente :

$$R_e = \frac{1}{2Cf_c}$$

5) En remplaçant les condensateurs commutés par leur résistance équivalente, le schéma du montage devient :



On applique la méthode n° 1 :

$$\underline{V}_A = \frac{\frac{\underline{V}_e}{R_e} + jC_2\omega \cdot \underline{V}_s + jC_1\omega \cdot \underline{\epsilon}^-}{\frac{1}{R_e} + jC_2\omega + jC_1\omega} \quad (\text{théorème de Millman})$$

avec $\underline{\epsilon}^- = 0$, donc :

$$\underline{V}_A \cdot \left(\frac{1}{R_e} + jC_2\omega + jC_1\omega \right) = \frac{\underline{V}_e}{R_e} + jC_2\omega \cdot \underline{V}_s \quad (c)$$

De même :

$$\underline{\epsilon}^- = \frac{jC_1\omega \cdot \underline{V}_A + \frac{\underline{V}_s}{R_e}}{jC_1\omega + \frac{1}{R_e}} = 0 \Rightarrow \underline{V}_A = -\frac{\underline{V}_s}{jR_e C_1 \omega}$$

En reportant dans (c), il vient :

$$\begin{aligned} -\frac{\underline{V}_s}{jR_e C_1 \omega} \cdot \left(\frac{1}{R_e} + jC_2\omega + jC_1\omega \right) &= \frac{\underline{V}_e}{R_e} + jC_2\omega \cdot \underline{V}_s \\ \Leftrightarrow \underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} &= \frac{-R_e C_1 (j\omega)}{1 + R_e (C_1 + C_2) \cdot (j\omega) + R_e^2 \cdot C_1 C_2 (j\omega)^2} \end{aligned}$$

6) On utilise la forme normalisée pour identifier les paramètres demandés :

$$\underline{T} = H_0 \cdot \frac{jx}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}, \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{\omega_0^2} = R_e^2 C_1 C_2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_e \sqrt{C_1 C_2}} = \frac{2Cf_c}{\sqrt{C_1 C_2}}$$

$$\text{et : } \frac{1}{Q\omega_0} = R_e (C_1 + C_2) \Rightarrow Q = R_e \sqrt{C_1 C_2} \times \frac{1}{R_e (C_1 + C_2)} = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}$$

Enfin, on déduit G_0 sachant qu'à la résonance $x = 1$, donc :

$$1 - x^2 = 1 - R_e^2 C_1 C_2 \cdot \omega^2 = 0 \Rightarrow \underline{T} = \frac{-R_e C_1(j\omega)}{R_e(C_1 + C_2)(j\omega)} = -\frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

d'où :

$$G_0 = 20\log|\underline{T}| = 20\log\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)$$

Exercice 14

1) • Détermination de H_0

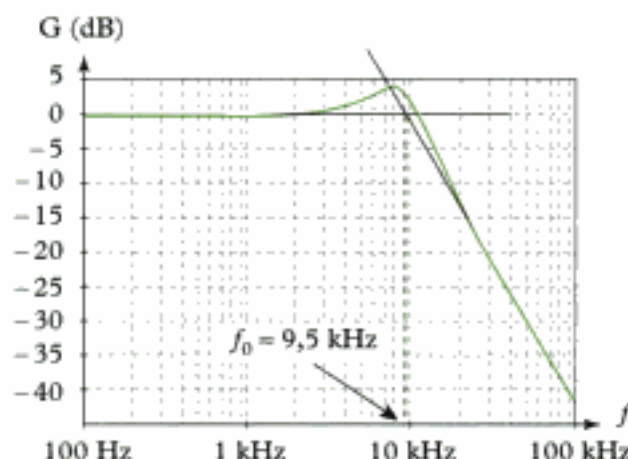
Sur le diagramme de Bode du gain, on lit :

$$H_0(\text{dB}) = 0 \Rightarrow H_0 = 1.$$

• Détermination de la pulsation propre

On commence par déterminer l'ordre du filtre. Dans la bande coupée, pour les fréquences élevées, la tangente au diagramme réel du gain est une droite de pente -40 dB/décade. Il s'agit donc d'un filtre du deuxième ordre.

La fréquence propre f_0 est donc située à l'intersection des asymptotes basses et hautes fréquences :



On lit ainsi $f_0 \approx 9,5$ kHz, d'où on déduit :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 59\,690 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

• Détermination du facteur de qualité

On commence par rechercher la valeur du gain maximal G_{\max} sur le diagramme de Bode du gain : on lit $G_{\max} = 4,4$ dB. Puis on détermine graphiquement les deux fréquences de coupure à -3 dB (pour lesquelles $G(\text{dB}) = G_{\max} - 3 \text{ dB} = 1,4$ dB). On trouve :

$$f_1 = 4\,020 \text{ Hz} \text{ et } f_2 = 10,6 \text{ kHz}.$$

D'où une largeur de bande passante : $\Delta f = f_2 - f_1 = 6,58$ kHz. Ainsi, le facteur de qualité Q s'écrit :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{9\,500}{6\,580} = 1,44$$

2) On applique la méthode n° 1 :

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{u}_e + \underline{Y}_3 \cdot \underline{V}_B + \underline{Y}_4 \cdot \underline{u}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4} \quad (1) \text{ (Millman en A)}$$

$$\underline{V}_B = \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \cdot \underline{V}_A \quad (2) \text{ (diviseur de tension en B)}$$

$$\underline{V}_B = \underline{u}_s \quad (3)$$

Les relations (1), (2), (3) donnent :

$$\frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_3} \cdot \underline{u}_s = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{u}_e + \underline{Y}_3 \cdot \underline{u}_s + \underline{Y}_4 \cdot \underline{u}_s}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}$$

$$\Leftrightarrow (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \cdot (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \cdot \underline{u}_s = \underline{Y}_3 \cdot \underline{Y}_1 \cdot \underline{u}_e + \underline{Y}_3^2 \cdot \underline{u}_s + \underline{Y}_3 \cdot \underline{Y}_4 \cdot \underline{u}_s$$

Soit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_2 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) + \underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}$$

3) • \underline{Y}_1 est nécessairement une résistance sinon les basses fréquences ne sont pas transmises en sortie du filtre.

• Parmi l'ensemble $\{\underline{Y}_2, \underline{Y}_4\}$ il doit y avoir nécessairement là aussi une résistance car sinon les basses fréquences ne sont pas transmises en sortie.

• Si \underline{Y}_4 est une résistance, alors \underline{Y}_3 est un condensateur (car le montage ne comporte que deux résistances). Mais dans ce cas, il est alors impossible d'avoir $s(t) \rightarrow e(t)$ en basses fréquences.

Conclusion :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1}; \quad \underline{Y}_2 = jC_2\omega; \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{R_3}; \quad \underline{Y}_4 = jC_4\omega$$

4) Dans cette dernière question, il faut commencer par remplacer $R_1 = R_3$ par R et en déduire \underline{H} :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{R^2}}{jC_2\omega\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_4\omega\right) + \frac{1}{R^2}}$$

$$= \frac{1}{1 + 2RC_2(j\omega) + R^2C_2C_4(j\omega)^2}$$

Test : on obtient bien la forme normalisée d'un filtre passe-bas du second ordre avec $H_0 = 1$.

Identifions ensuite la fréquence propre f_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = R^2C_2C_4 \Leftrightarrow f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2R^2C_2C_4}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = 2RC_2 \Leftrightarrow 4Q^2 = \frac{C_4}{C_2}$$

La résolution de ce système d'équations conduit à :

$$C_2 = \frac{1}{4\pi R f_0 Q} = \frac{1}{4\pi \times 10^4 \times 9,5 \cdot 10^3 \times 1,44} = 0,58 \text{ nF}$$

$$\text{et } C_4 = 4C_2Q^2 = 4,8 \text{ nF.}$$

Exercice 15

1) On reconnaît la structure d'un montage inverseur :

$$\underline{H} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

$$\text{avec ici : } \underline{Z}_1 = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} \text{ et } \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + jR_2C_2\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + jR_1C_1\omega}{1 + jR_2C_2\omega}$$

En identifiant avec la forme proposée, il vient :

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_1 C_1 = \frac{1}{\omega_c} \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

Ces deux résultats doivent toutefois être compatibles avec l'identification de $\frac{H_0}{f_c}$ avec $2\pi R_2 C_2$, ce qui fait apparaître la condition nécessaire suivante :

$$\frac{H_0}{f_c} = 2\pi R_2 C_2 \Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1} \cdot 2\pi R_1 C_1 = 2\pi R_2 C_2$$

soit : $C_1 = C_2$.

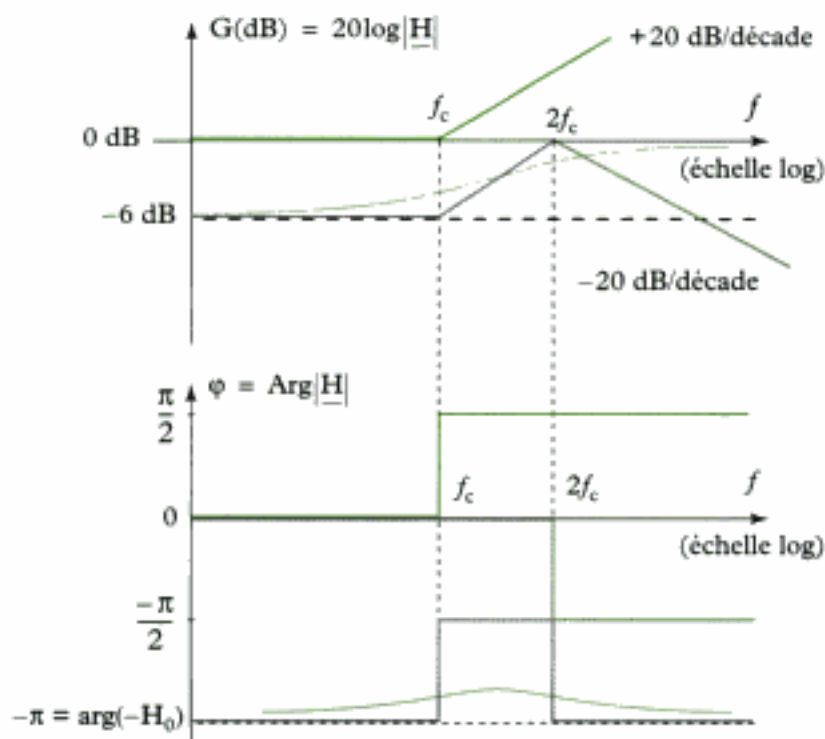
2) On commence par décomposer \underline{H} pour faire apparaître des transmittances dont les diagrammes de Bode sont connus :

$$\underline{H} = \underbrace{-H_0}_{\text{constante}} \times \underbrace{\left(1 + j\frac{f}{f_c}\right)}_{\text{passe-haut du 1^{er} ordre}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1 + jH_0\frac{f}{f_c}}\right)}_{\text{passe-bas du 1^{er} ordre}}$$

avec : $20\log|-H_0| = 20\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 20\log\left(\frac{1}{2}\right) = -6 \text{ dB}$,

$\frac{H_2}{f_c} = \frac{1}{2f_c}$: le filtre passe-bas a une fréquence de coupure égale à $2f_c$.

Il vient donc :



— : diagrammes asymptotiques du passe-haut

— : diagrammes asymptotiques du passe-bas

- - : diagrammes de Bode de $-H_0$

— : diagrammes de Bode réels de \underline{H}

3) • Pertinence du filtre à la vue du comportement basses-fréquences

Le diagramme de Bode du gain montre qu'il s'agit d'un filtre passe-haut. Mais ici, les basses fréquences ne sont atténuées que de $H_0(\text{dB}) = 20\log|-H_0| = -6\text{dB}$ ($H_0(\text{dB})$ peut même prendre des valeurs positives selon les valeurs de R_1 et R_2). Le choix relatif de R_1 et R_2 doit donc être réfléchi !

• Étude pour les hautes-fréquences

Le gain est de 0 dB, le filtre transmet les hautes fréquences (supérieures à $2f_c$). Cette caractéristique peut être obtenue par un simple filtre passif C-R.

Conclusion :

Avec une ou deux résistance(s) ajustable(s), on garantit un gain ajustable en basses fréquences. En particulier, en choisissant R_2 ajustable, on contrôle la valeur de ce gain et ce sans changer les fréquences de coupure :

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} \text{ et } 2f_c.$$

4) Les deux fréquences de coupures f_c et $H_0 f_c$ ne sont pas indépendantes, mais reliées par le paramètre H_0 . Il s'agit d'un outil de contrôle qui peut être mis à profit : on peut ainsi modifier les deux fréquences de coupure grâce à C_1 et ce, sans modifier la valeur de H_0 . On ajuste ainsi deux paramètres par un seul et même réglage.

5) • Comment obtenir un gain statique (ou amplification) positif ?

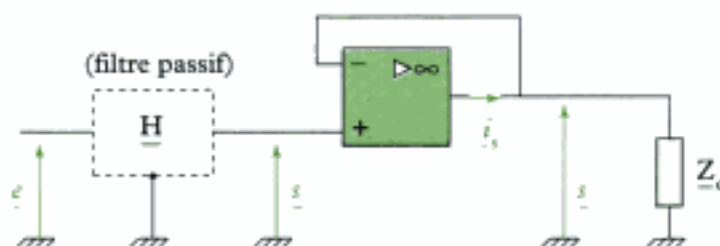
En théorie, il suffit de placer en cascade avec le montage précédent un montage inverseur de gain -1 .

• Peut-on émettre des réserves ?

En pratique, ce n'est pas si simple car chaque A.O. possède un certain nombre de défauts. Le montage comporterait alors deux composants actifs imparfaits.

Exercice 16

1) La fonction filtrage décrite par une fonction de transfert et des paramètres caractéristiques ne doit pas être perturbée par une charge qui serait placée à sa sortie. Le plus simple est alors d'utiliser un **montage suiveur** qui permet de rendre, dans une certaine mesure, le filtre indépendant de la charge d'impédance notée \underline{Z}_c ci-dessous :



Remarque :

Ceci est tout à fait réalisable tant que le courant i_s demandé par l'impédance \underline{Z}_c reste inférieur au courant de saturation de l'A.O. (ce montage n'est donc pas satisfaisant si une puissance de sortie élevée est requise).

2) On part de l'équation de la fonction de transfert \underline{H}_c du filtre coupe-bande :

$$\underline{H}_c = H_{c_0} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

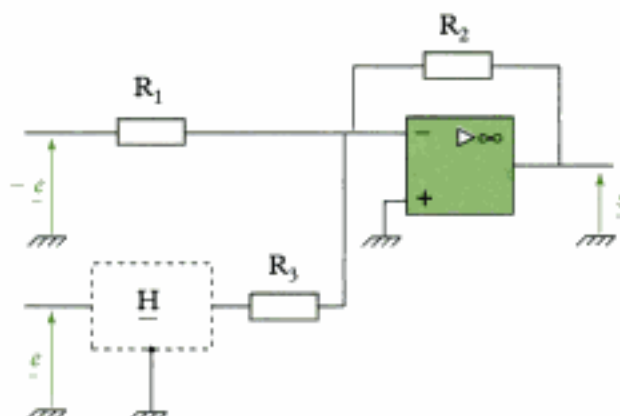
On essaye de décomposer cette fonction afin de faire apparaître la forme normalisée d'une fonction de transfert d'un filtre passe-bande :

$$\frac{1-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = \frac{1-x^2+j\frac{x}{Q}-j\frac{x}{Q}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} = 1 - \frac{1}{Q} \cdot \frac{jx}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$$

avec $\underline{H} = H_0 \cdot \frac{jx}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ qui représente la fonction de transfert normalisée d'un filtre passe-bande, donc :

$$\underline{H}_c = H_{c_0} - \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{H_{c_0}}{H_0} \right) \cdot \underline{H}.$$

Un **montage sommateur** permet ainsi de réaliser le filtre coupe-bande de transmittance $\underline{H}_c = \frac{s}{e}$ à partir du filtre passe-bande :



avec $\frac{R_2}{R_1} = H_{c_0}$ (on suppose $H_{c_0} > 0$, cas le plus fréquent)

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{H_{c_0}}{H_0 \cdot Q}.$$

3) Non, **il n'est pas possible d'élaborer un tel filtre**, car la pente de la bande coupée devrait être infinie et donc le dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$ serait défini par un polynôme d'ordre $n \rightarrow +\infty$.

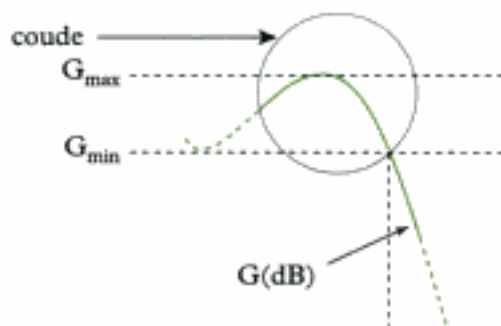
4) • Le filtre atténue certaines fréquences dans la bande passante (pour lesquelles on a $20 \log|\underline{H}| = G_{\min}$). On parle d'**ondulations dans la bande passante**. Il faut que l'écart entre G_{\max} et G_{\min} ne soit pas trop important, par exemple inférieur ou égal à 1 dB (soit environ 90 % du signal transmis en amplitude si $G(\text{dB}) = G_{\min}$).

• Le domaine fréquentiel situé entre f_c et f_a correspond à la bande coupée du filtre passe-bas. **L'idéal est de réduire au maximum l'intervalle $f_a - f_c$** afin de garantir une coupure la plus franche possible en dehors de la bande passante.

• La transition entre bande passante et bande coupée n'est pas franche :

le coude de la courbe de gain peut être optimisé (on parle de rectitude du coude de la courbe de gain).

• Pour des fréquences supérieures ou égales à f_a , la gain présente à nouveau des ondulations. **G_a représente l'atténuation minimale que doit garantir le filtre passe-bas dans cette bande de fréquences à éliminer.**



Remarques :

- en pratique, il faut faire des compromis entre les différents critères de qualité mis en évidence dans l'analyse de la courbe. On peut par exemple favoriser une coupure franche entre f_c et f_a au détriment de quelques ondulations dans la bande-passante ;
- cette étude est nécessairement incomplète car il reste à étudier la courbe de réponse de la phase (quelques précisions sont données à ce sujet en question suivante et dans l'exercice 12).

5) • Courbes de gain

- **En bande atténuée, les trois filtres se comportent de manière identique** avec une atténuation qui tend vers -40 dB/décade. De plus, leurs fréquences de coupure sont voisines (autour de $0,2$ Hz).
- **Toutefois, la réponse ① est la plus « rapide »** dans la mesure où la pente de -40 dB/décade est atteinte dès que la fréquence dépasse la fréquence de coupure. Tandis que la réponse de ③ est la plus « lente ».
- Dans la bande passante, ② présente la réponse la plus plate. ③ atténue les signaux d'entrée dans sa bande passante (environ de $9,5$ dB). ① présente une ondulation voisine de 1 dB ce qui est donc acceptable.

• Courbes de phase

- La réponse la plus marquée au niveau de la bande coupée correspond encore au filtre ①.
- Pour ③, on remarque que la **variation de phase est linéaire en fonction de la fréquence f** (ou de la pulsation ω) dans la bande passante :

$$\varphi = K \cdot f \Leftrightarrow \frac{\varphi}{f} = K = \text{constante.}$$

Ainsi, tous les harmoniques d'un signal appliqué à l'entrée du filtre ③ sont transmis avec un décalage temporel $\theta = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\varphi}{f} = \frac{K}{2\pi} = \text{constante.}$

On dit que le **filtre ③ n'induit pas de distorsion de phase** (ce qui *a fortiori* n'est pas le cas pour les deux autres filtres dans toute la bande passante).

Les systèmes bouclés

Introduction

Dans un premier temps, nous présenterons la structure type d'un système asservi. Nous établirons alors sa fonction de transfert pour en déduire sa stabilité. Nous étudierons ensuite un système électronique bouclé afin de montrer l'incidence de la boucle sur certaines propriétés du système.

Plan du chapitre 5

A. Présentation des systèmes asservis	194
1. Exemple introductif — Notion d'asservissement.	194
2. Définition d'un système asservi.	194
3. Structure d'un système asservi	194
4. Asservissement de vitesse d'un moteur.	196
B. Transmittance d'un système bouclé linéaire	197
1. Définition de la transmittance	197
2. Calcul de la transmittance d'un système bouclé	199
3. Cas d'une chaîne directe à grand gain	201
4. Sensibilité aux variations	202
C. Régime propre et stabilité	203
1. Stabilité	203
2. Système du premier ordre	203
3. Système du deuxième ordre	204
4. Généralisation	205
5. Marge de gain et marge de phase	206
6. Exemple du système de régulation de vitesse d'un moteur à courant continu . . .	207
D. Étude d'un système bouclé électronique à AO	207
1. Présentation	207
2. Transmittance du montage	208
3. Effet de la contre-réaction sur la bande passante	209
4. Effet de la contre-réaction sur le temps caractéristique	209

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre	211
Énoncés des exercices.	215
Solution des exercices.	221

1. Un système asservi est aussi appelé « système bouclé ».

A. Présentation des systèmes asservis¹

A.1. Exemple introductif – Notion d'asservissement

Un automobiliste emprunte l'autoroute et doit se conformer aux limitations de vitesse. Il veut maintenir constamment sa vitesse à la valeur maximale autorisée, soit $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pour cela, il regarde régulièrement son compteur de vitesse et agit sur l'accélérateur si la vitesse du véhicule est inférieure à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et ralentit si elle est supérieure à $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

En comparant sa vitesse réelle à la limite de $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, l'automobiliste peut maintenir sa vitesse constante. Il réalise ainsi de ce fait un asservissement de vitesse.

Dans cet exemple simple, l'asservissement nécessite une opération de comparaison permanente entre la valeur souhaitée de la grandeur à asservir, appelée *consigne*, et la valeur réelle mesurée par un capteur. La comparaison est ici effectuée par un opérateur humain qui pourra disparaître dans le cas d'un système asservi électronique.

A.2. Définition d'un système asservi

Définition 1

Un **système asservi** est un dispositif technique qui permet d'asservir une grandeur physique à une consigne.

Un système asservi ne doit pas nécessiter l'intervention d'un opérateur humain : il est de ce fait automatique².

2. Un dispositif qui permet de maintenir la vitesse de l'automobile à la consigne de $130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sans intervention du conducteur constitue ainsi un asservissement de vitesse.

A.3. Structure d'un système asservi

A.3.1 - Représentation d'un système asservi

Un système asservi est un système dans lequel la grandeur de sortie est utilisée pour commander l'élément qui agit sur cette grandeur. Un tel système est qualifié de **système bouclé**.

Un système asservi simple possède la structure suivante, où chaque bloc a une fonction bien définie :

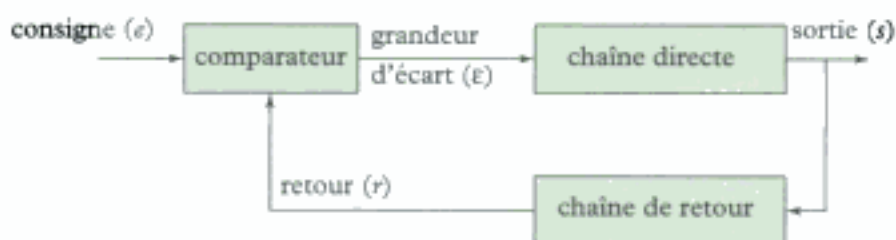


Fig. 1 - Structure d'un système asservi. Les flèches indiquent le sens de propagation de l'information entre les différents éléments du système.

A.3.2 - Chaîne directe

La chaîne directe est l'organe qui permet de commander la grandeur à asservir. Son entrée correspond à la sortie du comparateur et sa grandeur de sortie est la grandeur à asservir.

1. Dans un système asservi électronique, l'actionneur convertit l'énergie électrique en une autre forme d'énergie (mécanique, thermique...).

Définition 2

Une **chaîne directe** est un organe de commande qui dispose :

- d'un *actionneur*¹ permettant d'agir sur la grandeur de sortie ;
- d'une *amplification de puissance* permettant de fournir l'énergie nécessaire à l'actionneur.

Dans l'exemple de l'asservissement de vitesse, la chaîne directe est constituée du moteur. Celui-ci agit sur la vitesse du véhicule en fonction de la pression exercée par le conducteur sur l'accélérateur : il constitue donc l'actionneur et l'amplification de puissance.

A.3.3 - Chaîne de retour

La chaîne de retour est l'organe d'observation de la grandeur à asservir. Son entrée est constituée par la grandeur à asservir et sa sortie est la grandeur de retour.

Définition 3

Une **chaîne de retour** est un dispositif comportant un capteur² qui permet de convertir la grandeur à asservir (vitesse, position, température) en un signal que le comparateur peut ensuite traiter.

Dans l'exemple précédent, la chaîne de retour est constituée par un capteur de vitesse et un système permettant de visualiser cette vitesse. La valeur lue sur le compteur constitue la grandeur de retour.

A.3.4 - Comparateur

C'est l'organe de comparaison. Ses entrées sont constituées par la grandeur de retour (r) et la consigne (e). Sa sortie est la grandeur d'écart (ϵ).

Définition 4

Un **comparateur** est un système produisant un signal fonction de la différence des signaux d'entrée et de retour ($e - r$).

Les grandeurs e , ϵ et r doivent être de même nature physique. Dans l'exemple précédent, l'automobiliste constitue le comparateur et la vitesse maximale autorisée constitue la consigne.

Dans la majorité des cas, nous rencontrerons des comparateurs linéaires.

Définition 5

Un **comparateur linéaire** est un système produisant un signal ϵ proportionnel à la différence des signaux d'entrée ($e - r$) :

$$\epsilon = k(e - r).$$

3. Si $k \neq 1$, le schéma devient :

Souvent, $k = 1$ et le comparateur est représenté par le schéma suivant³ :

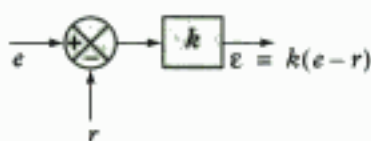


Fig. 2 - Représentation d'un comparateur linéaire élémentaire ($k = 1$).

A.3.5 - Retour sur l'exemple introductif

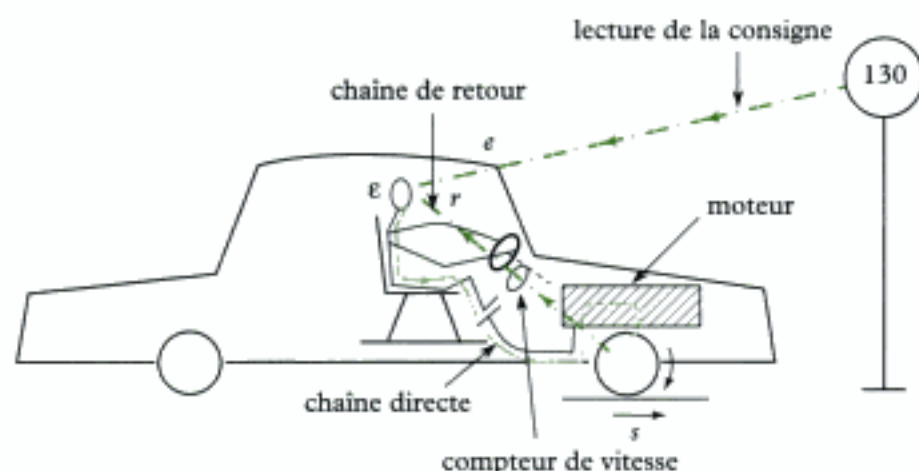


Fig. 3 - Asservissement de vitesse d'une automobile.

La figure 3 ci-dessus représente la structure du système bouclé présenté au paragraphe A.1. Pour asservir sa vitesse, le conducteur agit en comparateur. L'ensemble {conducteur + véhicule} constitue un système bouclé semblable à celui présenté au paragraphe A.3.1.

A.4. Asservissement de vitesse d'un moteur

Nous avons présenté les différents éléments constituant un système asservi. Cependant, quels sont les systèmes physiques qui interviennent dans une chaîne directe, une chaîne de retour et un comparateur ?

L'exemple de l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu permet d'étudier une structure simple de système asservi. Sur la figure 4, le moteur à courant continu à excitation constante¹ (M) est alimenté par une alimentation de puissance. Celle-ci est réalisée par un hacheur². Une génératrice tachymétrique (GT) fournit une tension proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur :

$$r = \alpha \Omega,$$

où Ω est la vitesse de rotation du moteur en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et α un coefficient constant positif.

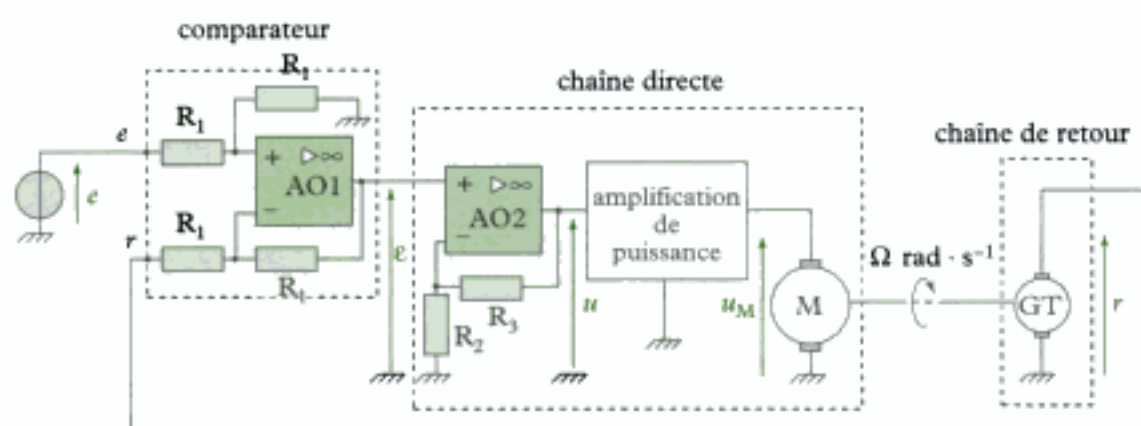


Fig. 4 - Asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu.

• Description du dispositif

– Le montage réalisé par AO1 et les quatre résistances R_1 est un montage soustracteur d'amplification unité³. Nous avons ainsi :

$$\epsilon = e - r.$$

1. Dans un tel moteur, si la réaction magnétique d'induit peut être négligée, la f.é.m induite est proportionnelle à la vitesse de rotation du moteur.

2. Se reporter au cours d'électrotechnique pour plus de précision sur le fonctionnement d'un hacheur.

3. Voir chapitre 3.

1. Voir chapitre 3.

– L'amplificateur opérationnel AO2 avec les résistances R_2 et R_3 constituent un montage amplificateur non inverseur d'amplification¹ $1 + \frac{R_3}{R_2}$. Nous avons ainsi :

$$u = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)\varepsilon.$$

– L'amplification de puissance est réalisée par un hacheur commandé par la tension u , d'où :

$$u_M = \beta u, \text{ où } \beta > 0.$$

Le moteur (M) agit sur la vitesse angulaire de rotation de l'arbre Ω en fonction de la tension u_M .

– La génératrice tachymétrique (GT) permet de convertir la vitesse angulaire de rotation Ω en une tension continue r proportionnelle à Ω :

$$r = \alpha \Omega, \text{ où } \alpha > 0.$$

Ainsi, GT est un capteur de vitesse.

• Étude du système asservi

2. Ou régulation de vitesse. La régulation consiste à maintenir une grandeur physique à une valeur constante.

Ce système permet l'asservissement² de vitesse du moteur à courant continu, c'est-à-dire que la vitesse de rotation du moteur est uniquement fonction de la valeur de la consigne ε indépendamment de la charge appliquée au moteur.

– Lorsque le moteur est soumis à une charge qui augmente (couple résistant plus fort sur l'arbre du moteur), sa vitesse diminue.

La génératrice tachymétrique fournit alors une tension plus faible (la tension r diminue).

De ce fait, la grandeur d'écart ε augmente ($\varepsilon - r$ augmente).

Donc la tension u augmente, ce qui a pour conséquence d'augmenter la tension u_M .

Le moteur accélère : il va donc retrouver sa vitesse initiale.

– Lorsque le moteur est soumis à une charge qui diminue (couple résistant plus faible sur l'arbre du moteur), sa vitesse augmente.

La génératrice tachymétrique fournit alors une tension plus forte (la tension r augmente).

De ce fait, la grandeur d'écart ε diminue ($\varepsilon - r$ diminue).

Donc la tension u diminue, ce qui a pour conséquence de diminuer la tension u_M .

Le moteur ralentit : il va donc retrouver sa vitesse initiale.

Nous voyons dans cet exemple que l'asservissement permet d'adapter automatiquement la tension d'alimentation du moteur pour que sa vitesse reste constante et ne dépend que de la valeur de la consigne ε .

3. Voir la définition dans le chapitre 1 de cet ouvrage.

B. Transmittance³ d'un système bouclé linéaire

B.1. Définition de la transmittance

Un système linéaire, à une entrée notée e et une sortie notée s , est caractérisé par sa fonction de transfert ou transmittance que l'on écrit en notation complexe ou en notation symbolique de Laplace⁴.

4. Voir la définition dans le chapitre 1 de cet ouvrage.

Hidden page

La transmittance de l'amplificateur de tension est :

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = 1 + \frac{R_3}{R_2}.$$

La tension en sortie de l'amplificateur de puissance est proportionnelle à u , soit :

$$U_M(p) = \beta U(p), \text{ où } \beta > 0.$$

La grandeur de sortie est la vitesse Ω .

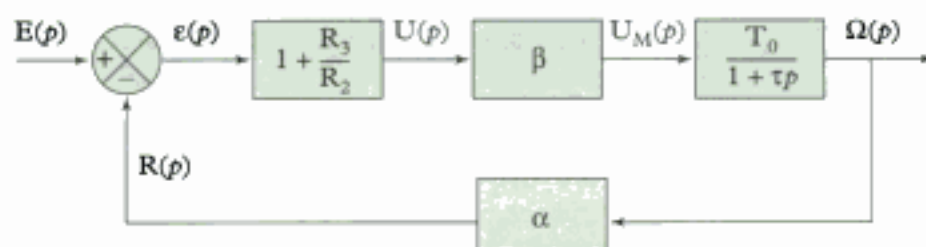


Fig. 6 - Représentation sous forme de schéma-bloc de l'asservissement de vitesse.

Une fois cette représentation réalisée, nous pourrions déterminer la transmittance du système bouclé.

B.2. Calcul de la transmittance d'un système bouclé

Notons $A(p)$ la transmittance de la chaîne directe et $B(p)$ la transmittance de la chaîne de retour. La consigne est représentée par le signal $E(p)$, la grandeur d'écart par $\varepsilon(p)$, la grandeur de sortie par $S(p)$ et la grandeur de retour par $R(p)$. Le système bouclé se représente sous la forme (fig. 7) :



Fig. 7 - Schéma-bloc d'un système bouclé.

B.2.1 - Transmittance en boucle ouverte

Définition 7

La transmittance d'un système asservi **en boucle ouverte** est :

$$H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)},$$

où $\varepsilon(p)$ et $R(p)$ sont les expressions sous forme symbolique de Laplace respectivement de la grandeur d'écart et de la grandeur de retour.

D'après la figure 7, nous avons :

$$R(p) = B(p)S(p) \text{ et } S(p) = A(p)\varepsilon(p).$$

Nous en déduisons :

$$R(p) = B(p)A(p)\varepsilon(p), \text{ d'où : } H_{BO}(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p).$$

Propriété 1

La transmittance d'un système asservi en boucle ouverte est le produit des transmittances $A(p)$ et $B(p)$ des chaînes directe et de retour :

$$H_{BO}(p) = A(p)B(p).$$

B.2.2 - Transmittance en boucle fermée**Définition 8**

La transmittance d'un système asservi en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)},$$

où $E(p)$ et $S(p)$ sont les expressions sous forme symbolique de Laplace respectivement de la grandeur d'entrée et de la grandeur de sortie.

D'après la figure 7, nous avons :

$$S(p) = A(p)\varepsilon(p), \quad R(p) = B(p)S(p) \quad \text{et} \quad \varepsilon(p) = E(p) - R(p),$$

soit :

$$S(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)].$$

Nous en déduisons la transmittance en boucle fermée¹ :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}.$$

1. Dans le cas où le comparateur est un additionneur ($\varepsilon = E + R$), la transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}.$$

Propriété 2

La transmittance d'un système asservi en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)},$$

où $A(p)$ et $B(p)$ sont respectivement les transmittances de la chaîne directe et de la chaîne de retour.

Application 2 Transmittances en boucle ouverte et en boucle fermée

Déterminer les transmittances en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ et en boucle fermée $H(p)$ du système d'asservissement de vitesse du moteur à courant continu présenté au paragraphe A.4.

Solution

- La transmittance du système en boucle ouverte est :

$$H_{BO}(p) = A(p)B(p).$$

Or, d'après la figure 6 :

$$A(p) = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)\beta \frac{T_0}{1 + \tau p} \quad \text{et} \quad B(p) = \alpha, \quad \text{d'où :} \quad H_{BO}(p) = \frac{\alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p}.$$

- La transmittance du système en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}.$$

D'après le calcul de la transmittance en boucle ouverte :

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{\frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p}}{1 + \frac{\alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \tau p}} = \frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) + \tau p} \\
 &= \frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)} \times \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)} p}
 \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau_{BF} p}, \text{ avec : } H_0 = \frac{T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)} \text{ et } \tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}.$$

B.3. Cas d'une chaîne directe à grand gain

Dans cette partie, nous travaillerons en notation complexe pour une meilleure compréhension¹. La transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 + \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)}.$$

Definition 9

On parle de **chaîne directe à grand gain** lorsque $|\underline{A}(j\omega)|$ est suffisamment élevé pour considérer² :

$$|\underline{H}_{BO}(j\omega)| = |\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| \gg 1.$$

La transmittance en boucle fermée se simplifie alors sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} = \frac{1}{\underline{B}(j\omega)}.$$

Propriété 3

La transmittance en boucle fermée pour un système bouclé à grand gain est :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\underline{B}(j\omega)} \text{ ou } H(p) = \frac{1}{B(p)}.$$

La transmittance d'un système asservi ayant une chaîne directe à grand gain ne dépend donc que de la transmittance de la chaîne de retour.

Propriété 4

Les caractéristiques de la chaîne de retour déterminent les caractéristiques du système bouclé dans le cas où la chaîne directe possède une amplification importante.

1. La notation complexe permet de travailler en module. En effet, la signification de $A(p)B(p) \gg 1$ est plus difficile à appréhender.

2. L'AO parfait dans lequel on suppose l'amplification infinie est le cas typique d'une chaîne directe à grand gain.

Hidden page

1. Dans certains cas, on énonce que le système est stable si à tout signal d'entrée $e(t)$ borné correspond une réponse $s(t)$ bornée. Ce critère peut en effet être suffisant dans la réalité industrielle où d'éventuelles oscillations de la grandeur de sortie autour du point de repos sont parfois non significatives en terme d'instabilité pour le système étudié.

2. C'est-à-dire ne comportant que des composants linéaires.

3. La fonction dérivateur parfait n'a pas d'existence physique. Ceci explique que le degré du numérateur est inférieur ou égal au degré du dénominateur.

C. Régime propre et stabilité

C.1. Stabilité

La stabilité d'un système physique comportant une entrée et une sortie peut se définir ainsi :

Définition 10

Un système **bouclé** évoluant en régime **libre** (entrée e nulle) est stable lorsque la sortie s tend spontanément vers 0¹.

L'étude de la stabilité d'un système bouclé linéaire² peut se faire à partir de sa transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)},$$

où $N(p)$ et $D(p)$ sont deux polynômes en p . En se limitant aux systèmes du second ordre, nous aurons toujours :

$$\text{degré du numérateur} \leq \text{degré du dénominateur}^3 \leq 2,$$

le numérateur et le dénominateur pouvant se mettre sous la forme :

$$N(p) = b_0 + b_1p + b_2p^2 \quad \text{et} \quad D(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2.$$

De la définition de $H(p)$, il vient :

$$b_0E(p) + b_1pE(p) + b_2p^2E(p) = a_0S(p) + a_1pS(p) + a_2p^2S(p)$$

ce qui donne l'équation différentielle :

$$b_0e(t) + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_2\frac{d^2e(t)}{dt^2} = a_0s(t) + a_1\frac{ds(t)}{dt} + a_2\frac{d^2s(t)}{dt^2}.$$

La sortie $s(t)$ est ainsi la somme d'un régime forcé $s_f(t)$ et d'un régime libre $s_\ell(t)$. Si le système n'est pas intégrateur ($a_0 \neq 0$), le régime forcé est borné, donc la stabilité dépend du régime libre, qui vérifie l'équation homogène (sans second membre) :

$$a_0s_\ell(t) + a_1\frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_2\frac{d^2s_\ell(t)}{dt^2} = 0.$$

Les critères de stabilité du système dépendront ainsi **des coefficients a_0 , a_1 et a_2 du dénominateur** de la transmittance du système bouclé.

C.2. Système du premier ordre

Pour un système du premier ordre, nous avons :

$$\text{degré du numérateur} \leq \text{degré du dénominateur} \leq 1.$$

Cette condition équivaut à :

$$a_2 = 0, \quad a_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0,$$

soit : $D(p) = a_0 + a_1p$.

Le régime libre $s_\ell(t)$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$a_1\frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_0s_\ell(t) = 0, \quad \text{soit} : \frac{a_1}{a_0}\frac{ds_\ell(t)}{dt} + s_\ell(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont du type :

$$s_\ell(t) = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}t}, \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

Hidden page

• **Troisième cas ($\Delta < 0$) :** $a_1^2 < 4a_2a_0$

L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -\frac{a_1}{2a_2} - j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a_2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{a_1}{2a_2} + j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a_2}.$$

En posant $\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}$ et $\omega = \frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_2}$, la solution de l'équation différentielle du régime libre¹ est :

$$s_c(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi),$$

où φ est une constante qui représente la phase à l'origine du signal $s_c(t)$.

Le système est stable si le régime libre tend vers zéro, soit :

$$\frac{a_1}{2a_2} > 0, \text{ c'est-à-dire } a_1 \text{ et } a_2 \text{ de même signe.}$$

Comme $a_1^2 < 4a_2a_0$, les coefficients a_2 et a_0 sont aussi de même signe.

Propriété 6

Un système du deuxième ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type $a_2p^2 + a_1p + a_0$ est **stable** si :

a_2 , a_1 et a_0 sont **de même signe**.

Si $a_1 = 0$, le système est à la limite de la stabilité et se comporte comme un oscillateur sinusoïdal².

C.4. Généralisation

Nous avons vu dans les paragraphes C.2. et C.3. que l'étude de la stabilité se ramène à la recherche des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle du système.

Les racines de cette équation caractéristique sont aussi les solutions de l'équation $D(p) = 0$. Elles sont appelées dans ce cas les « pôles de $H(p)$ ».

Nous retiendrons sans démonstration la propriété suivante.

Propriété 7

Un système linéaire est stable si les pôles de sa transmittance sont à **parties réelles négatives**.

D'autre part, comme la transmittance d'un système bouclé s'écrit :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)},$$

rechercher la stabilité d'un système bouclé revient à rechercher les parties réelles des racines du dénominateur :

$$1 + H_{BO}(p) = 0.$$

Propriété 8

Un système bouclé linéaire est stable si les **parties réelles** des solutions de l'équation $1 + H_{BO}(p) = 0$ sont **négatives**.

¹ Si le coefficient a_1 est nul, le régime libre est un régime sinusoïdal d'amplitude constante. Le système est alors un oscillateur sinusoïdal, que nous étudierons dans le chapitre suivant.

² Nous étudions ce cas dans le chapitre suivant.

C.5. Marge de gain et marge de phase

Dans ce paragraphe, nous donnerons un critère graphique simple pour définir la stabilité. À la limite de stabilité, le système est oscillateur et nous admettrons¹ que $p = j\omega$. L'étude de la stabilité peut se faire à partir de l'équation $1 + \underline{H}_{BO}(j\omega) = 0$, soit :

¹. Voir chapitre 6.

$$\underline{H}_{BO}(j\omega) = -1, \text{ traduit par : } \begin{cases} G = 20\log|\underline{H}_{BO}(j\omega)| = 0 \\ \text{Arg}(\underline{H}_{BO}(j\omega)) = -\pi \text{ ou } \text{Arg}(\underline{H}_{BO}(j\omega)) < 0 \end{cases}$$

S'il existe une pulsation ω pour laquelle ces deux conditions sont réalisées, le système est oscillateur.

La **marge de gain** M_G et la **marge de phase** M_φ permettent d'apprécier l'écart par rapport à la possibilité d'oscillations sinusoïdales.

– Soit ω_π la pulsation pour laquelle le déphasage de la transmittance vaut π radians. La marge de gain vaut :

$$M_G = 0 - G(\omega_\pi) = -G(\omega_\pi), \text{ où } G(\omega_\pi) = 20\log|\underline{H}_{BO}(j\omega_\pi)|.$$

Si $M_G > 0$, le système est stable ; si $M_G < 0$, le système est instable.

– Soit ω_1 la pulsation pour laquelle le gain de la transmittance vaut 0 dB. La marge de phase vaut :

$$M_\varphi = \pi + \text{Arg}(\underline{H}_{BO}(j\omega_1)).$$

Si $M_\varphi > 0$, le système est stable ; si $M_\varphi < 0$, le système est instable.

Exemple :

Sur la **figure 8**, les marges de gain et de phase sont déterminées à partir des diagrammes de Bode de la transmittance en boucle ouverte $\underline{H}_{BO}(j\omega)$. Graphiquement, on mesure une marge de gain égale à 16 dB et une marge de phase d'environ 90 degrés. Le système est donc stable.

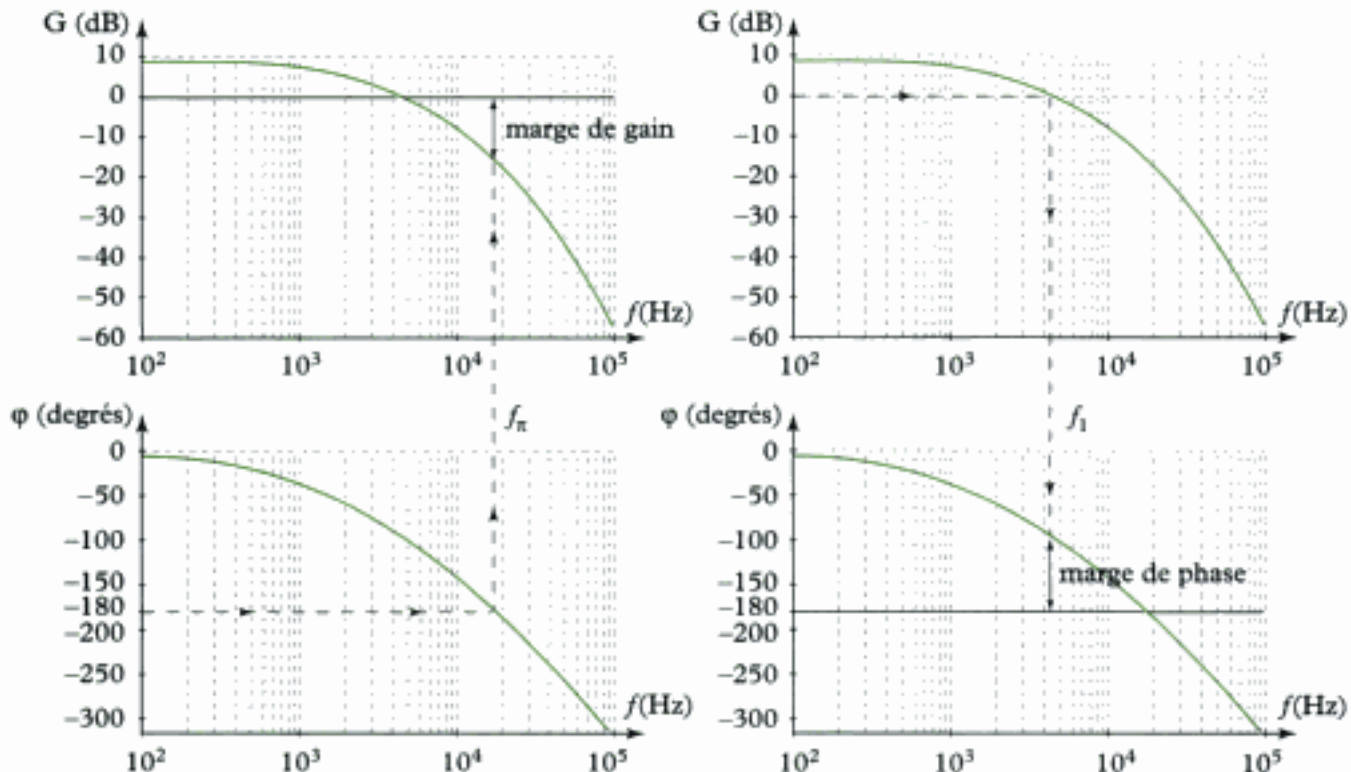


Fig. 8 - Détermination de la marge de gain M_G (à gauche) et de la marge de phase M_φ (à droite) à partir des diagrammes de Bode.

C.6. Exemple du régulateur de vitesse d'un moteur à courant continu

La transmittance en boucle fermée du système de régulation de vitesse du paragraphe A.4 est de la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \tau_{BF}p}, \text{ avec } \tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + \alpha T_0 \beta \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right)}.$$

Comme T_0 , α et β sont positifs, alors τ_{BF} est positif, donc du même signe que 1. Le système asservi est stable quelles que soient les valeurs de R_2 et R_3 .

D. Étude d'un système bouclé électronique à AO

D.1. Présentation

L'amplificateur non-inverseur à amplificateur opérationnel est un exemple typique de système électronique avec une boucle fermée (fig. 9).

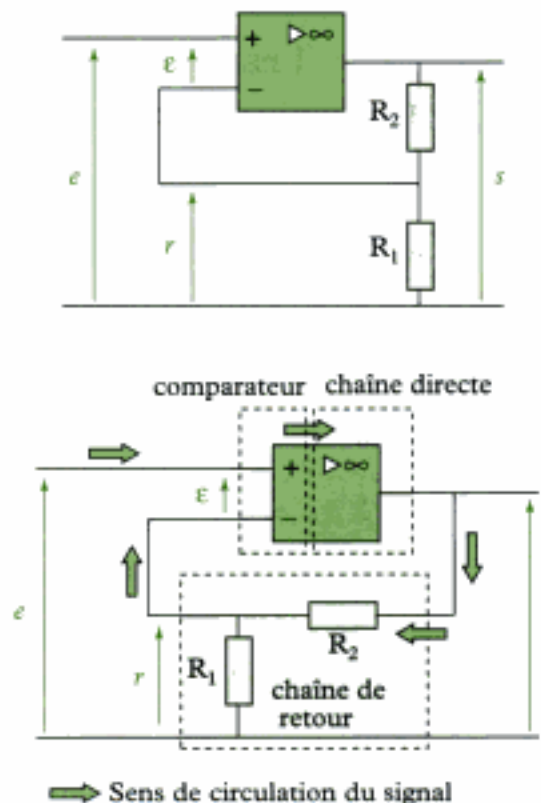


Fig. 9 - Amplificateur non-inverseur à AO et structure du système bouclé.

- La chaîne directe est constituée par l'amplificateur opérationnel, qui joue le rôle d'amplificateur de puissance et de comparateur linéaire.
- La chaîne de retour est constituée par les deux résistances R_1 et R_2 ; le diviseur de tension ainsi constitué produit le signal de retour r à partir du signal de sortie s .
- La consigne est ici représentée par la tension d'entrée e . ϵ représente l'écart entre le signal d'entrée e et le signal de retour r .

En considérant les courants d'entrée de l'AO nuls, les équations du système sont :

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p), \quad R(p) = \frac{R_1}{R_2 + R_1} S(p) \quad \text{et} \quad S(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}} \varepsilon(p),$$

où μ_0 est l'amplification statique de l'AO et ω_{AO} sa pulsation de coupure. Nous pouvons donc représenter le montage par le schéma-bloc (fig. 10) :

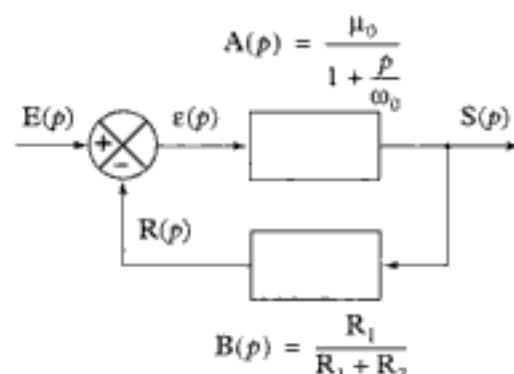


Fig. 10 - Schéma-bloc du montage non-inverseur à A.O.

Ce montage est un exemple de système à chaîne directe du premier ordre et à retour réel¹.

1. Dans cet exemple, en effet, $A(p)$ est du premier ordre et B est réel.

D.2. Transmittance du montage

D'après le schéma-bloc de la figure 10, nous avons :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}}}{1 + \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{AO}}} \times \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}}}{1 + \frac{p}{\omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}\right)}}$$

Ce qui donne en notation complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{avec} \quad H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}\right).$$

Exemple :

Pour un montage comprenant un AO LM741, nous avons : $\mu_0 = 2 \cdot 10^5$ et $\omega_0 = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Nous prenons en outre² : $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$.

- Calcul de l'amplification :

$$H_0 = \frac{\mu_0}{\frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}}, \quad \text{d'où} : H_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 101.$$

Nous remarquons que la réaction négative a réduit l'amplification, qui était de $2 \cdot 10^5$ pour l'AO seul.

- Calcul de la pulsation ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \omega_{AO}, \quad \text{d'où} : \omega_0 = 2 \cdot 10^5 \times \frac{1}{101} \times 50 = 9,9 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. Nous sommes dans le cas d'une chaîne directe à grand gain :

$$\frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \gg 1.$$

Nous remarquons que la réaction négative a augmenté la largeur de la bande passante, qui était de $50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'AO seul.

D.3. Effet de la contre-réaction sur la bande passante

La chaîne directe étant un AO, elle peut être modélisée typiquement par un système du premier ordre.

– L'amplification statique de la chaîne directe est égale à μ_0 et celle du système bouclé est :

1. Car : $\frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} > 0$.

$$H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}}, \text{ d'où } : H_0 < \mu_0.$$

– La largeur de la bande passante de la chaîne directe est égale à ω_{AO} et celle du système bouclé à :

$$\omega_0 = \omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_2}{R_1 + R_2} \right), \text{ d'où } : \omega_0 > \omega_{AO}.$$

L'introduction de la chaîne de retour a engendré une diminution de l'amplification statique et a permis l'augmentation de la bande passante.

Propriété 9

L'introduction d'une **contre-réaction** dans un système constitué d'une chaîne directe du premier ordre et d'un retour réel permet **d'augmenter la bande passante** du système (mais au détriment de l'amplification).

Exemple :

Dans le montage du paragraphe D.2, la bande passante est passée de $50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ à $9,9 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, mais l'amplification est passée de $2 \cdot 10^5$ à 101.

Remarque :

Pour un AO donné, le produit de l'amplification du montage non-inverseur par la largeur de la bande passante, appelé « facteur de mérite », est constant :

$$H_0 \omega_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_2}{R_1 + R_2} \right) = \mu_0 \omega_{AO}.$$

Ainsi, si la largeur de la bande passante du montage augmente, son amplification diminue, et inversement.

D.4. Effet de la contre-réaction sur le temps caractéristique

La transmittance du système bouclé est² :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}}, \text{ d'où } : S(p) + \frac{p}{\omega_0} S(p) = H_0 E(p).$$

Nous en déduisons l'équation différentielle du système bouclé :

$$s(t) + \tau_0 \frac{ds(t)}{dt} = H_0 e(t), \text{ avec } \tau_0 = \frac{1}{\omega_0}.$$

² Pour étudier le temps caractéristique du système bouclé, nous calculons sa transmittance pour en déduire son équation différentielle. Nous déterminons ensuite la réponse du système bouclé à un échelon.

Déterminons la réponse à un échelon défini par :

$$\begin{cases} u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Cette solution est valable si :

$$\frac{ds(t)}{dt} \leq SR,$$

où SR est le slew-rate de l'AO, et si :

$$|H_0 E| < V_{SAT},$$

où V_{SAT} est la tension de saturation de l'AO.

2. Voir le chapitre 2.

La réponse à l'échelon est alors la solution de l'équation différentielle¹ lorsque l'entrée a une valeur constante égale à E, c'est-à-dire :

$$s(t) = H_0 E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \right).$$

Les temps de réponse² à 5 % du système bouclé et la chaîne directe sont respectivement de :

$$t_{RBF} = 3\tau_0 = \frac{3}{\omega_0} = 30 \mu s \quad \text{et} \quad t_{RAO} = 3\tau_{AO} = \frac{3}{\omega_{AO}} = 60 ms.$$

Nous remarquons que :

$$\frac{t_{RBF}}{t_{RAO}} = \frac{\frac{3}{\omega_0}}{\frac{3}{\omega_{AO}}} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_0 R_2}{R_1 + R_2}} = 2 \cdot 10^3.$$

La réaction négative a permis de réduire le temps de réponse du montage d'un facteur $2 \cdot 10^3$. Le système répond donc beaucoup plus rapidement aux sollicitations en entrée.

Propriété 10

L'introduction d'une **contre-réaction** dans un système constitué d'une chaîne directe du premier ordre et d'un retour réel permet de diminuer son temps de réponse, c'est-à-dire **d'augmenter sa rapidité**.

Hidden page

- Une chaîne directe est à **grand gain** si le module de la transmittance en boucle ouverte est :

$$|\underline{H}_{BO}(j\omega)| = |\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| \gg 1.$$

La transmittance du système bouclé devient alors :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{1}{\underline{B}(j\omega)} \quad \text{ou} \quad \underline{H}(p) \approx \frac{1}{\underline{B}(p)}.$$

✓ Stabilité

La **stabilité d'un système linéaire** se détermine en étudiant les coefficients du dénominateur de la transmittance.

- Un système du premier ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type $a_1p + a_0$ est stable si a_0 et a_1 sont de même signe.
- Un système du deuxième ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type $a_2p^2 + a_1p + a_0$ est stable si a_0 , a_1 et a_2 sont de même signe.

✓ Chaîne directe du premier ordre et retour réel

Le **montage non-inverseur** constitue un exemple de système bouclé constitué d'une *chaîne directe du premier ordre* et d'un *retour réel*.

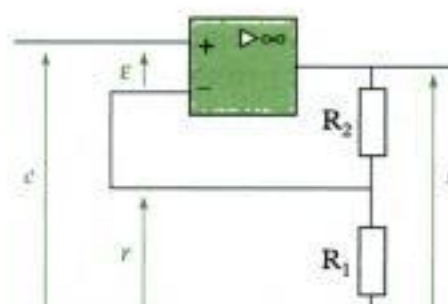
- La largeur de bande passante du système bouclé, son amplification et son temps de réponse sont respectivement :

$$\omega_0 = \omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right), \quad H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}}$$

$$\text{et } t_{RBF} = \frac{t_{RAO}}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}}$$

avec ω_{AO} la bande passante, μ_0 amplification et t_{RAO} temps de réponse de la chaîne directe.

- L'introduction d'une **contre-réaction** augmente la largeur de la bande passante (au détriment de l'amplification) et diminue le temps de réponse.



Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment calculer la transmittance d'un système bouclé ?

On souhaite calculer la transmittance d'un système linéaire bouclé connaissant son schéma.

→ Savoir faire

- ❶ Écrire les différentes équations du système de manière à identifier la transmittance de la chaîne directe $A(p)$ et de la chaîne de retour $B(p)$.
- ❷ Réaliser le schéma-bloc du montage.
- ❸ En déduire la transmittance du système bouclé en utilisant éventuellement la formule du cours pour un système bouclé simple.

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Soit ω_c la pulsation pour laquelle $\arg(\underline{T}(\omega_c)) = -180^\circ$, alors :

$$M_G = -20 \log |\underline{T}(\omega_c)|.$$

Si $M_G > 0$, le système asservi est stable, si $M_G < 0$ le système asservi est instable.

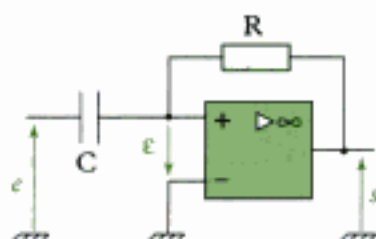
Calculer la marge de phase et la marge de gain avec : $|A_0 B| = 10$.

Conclure.

D'après Écrit ESIM, 1996.

Ex. 6 Stabilité d'un montage dérivateur

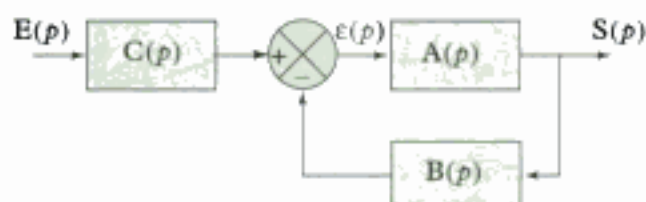
Considérons le montage dérivateur dont le schéma est donné ci-dessous.



On utilisera pour l'amplificateur opérationnel le modèle du filtre passe-bas du premier ordre avec comme paramètres :

- amplification statique : $\mu_0 = 200\,000$;
- pulsation de coupure : $\omega_{AO} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

1) Montrer que ce montage peut être représenté par le schéma-bloc suivant :



Donner les expressions de $A(p)$, $B(p)$ et $C(p)$.

2) Établir la fonction de transfert du montage dérivateur :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)},$$

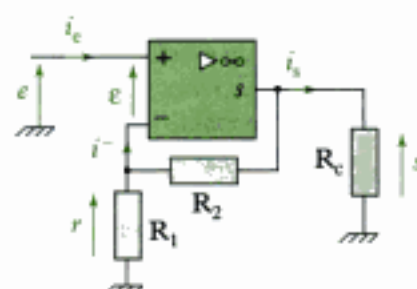
en fonction de R , C , μ_0 et ω_{AO} . En déduire la stabilité du montage.

Niveau 3

Ex. 7 Réaction négative

Dans cet exercice, on souhaite mettre en évidence l'influence d'une réaction négative sur les propriétés d'un quadripôle réalisé à partir d'un amplificateur opérationnel.

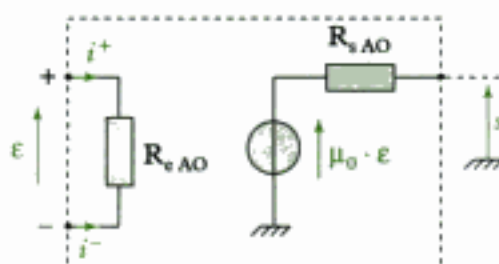
On prendra comme exemple l'amplificateur non inverseur représenté ci-après.



L'AO sera modélisé comme un quadripôle de résistance d'entrée R_{eAO} , d'amplification réelle μ_0 et de résistance de sortie R_{sAO} .

Pour les applications numériques, nous prendrons :

$$R_{eAO} = 2 \text{ M}\Omega, \quad R_{sAO} = 50 \text{ }\Omega \quad \text{et} \quad \mu_0 = 2 \cdot 10^5.$$



Avec la valeur numérique de R_{eAO} choisie, nous pourrions considérer i^- négligeable face aux courants circulant dans R_1 et R_2 .

Pour les applications numériques, nous prendrons :

$$R_1 = 1 \text{ k}\Omega \quad \text{et} \quad R_2 = 99 \text{ k}\Omega.$$

Le courant dans R_2 sera également négligé face au courant de sortie i_s .

Pour les questions 1) et 2), on supposera :

$$R_{sAO} = 0.$$

1) Exprimer l'amplification du montage :

$$A = \frac{s}{e}$$

en fonction de μ_0 , R_1 et R_2 . Calculer sa valeur numérique, puis conclure.

2) Déterminer la résistance d'entrée du montage en fonction de R_{eAO} , μ_0 , R_1 et R_2 .

Calculer sa valeur numérique, puis conclure.

3) Maintenant, $R_{sAO} \neq 0$. Déterminer la résistance de sortie du montage en fonction de R_{sAO} , μ_0 , R_1 et R_2 . Calculer sa valeur numérique, puis conclure.

Ex. 8 Positionnement de précision

On désire positionner une antenne, considérée par la suite comme le mobile, avec une grande précision. On utilise pour cela l'ensemble décrit à la figure 1 et composé comme suit :

- Une alimentation continue basse puissance délivre une tension dite de consigne notée c , appliquée à l'entrée P d'un comparateur décrit à la figure 2 constitué d'un amplificateur opérationnel parfait et de quatre résistances de valeurs R et AR , A étant un coefficient numérique.

• Un capteur de position délivre une tension proportionnelle à l'abscisse x du mobile ; ce signal r est appliqué à l'autre entrée N du comparateur. On notera B le coefficient de proportionnalité tel que :

$$r = Bx, \text{ avec } B = 20 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

• Le signal de sortie du comparateur est appliqué à l'entrée d'un amplificateur de puissance d'amplification en tension unité, alimentant le moteur.

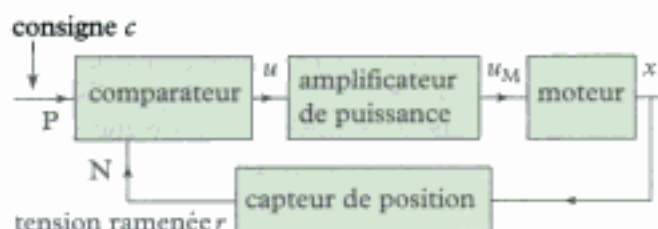


Fig. 1 - Schéma synoptique du contrôle de position.

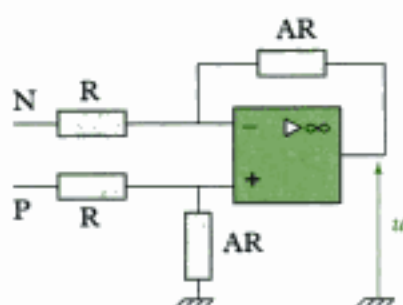


Fig. 2 - Comparateur.

On suppose que l'équation différentielle liant la vitesse v du mobile à la tension u_M est de la forme :

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = Ku_M,$$

avec $K = 0,10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ et $\tau = 50 \text{ ms}$.

1) Représenter un schéma constitué d'un comparateur soustracteur et de blocs en faisant apparaître les grandeurs x , v , c et u et en indiquant les fonctions de transfert de chaque bloc opérateur.

2) Pour une valeur constante C_0 de c , quelle est en régime permanent la valeur X_0 de x correspondante ?

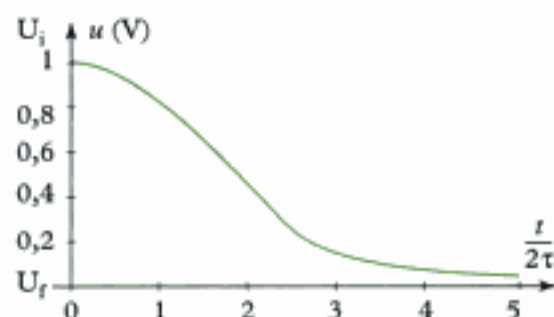
3) Établir une équation différentielle liant les grandeurs instantanées x et c .

4) On applique une consigne $c(t)$ telle que :

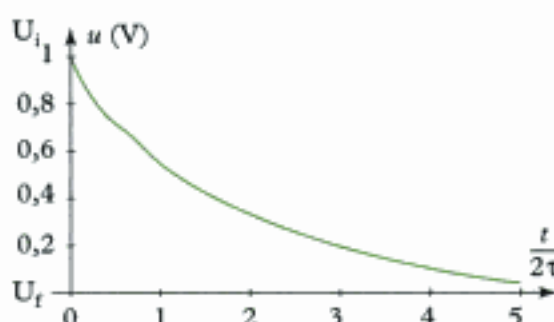
$$c(t) = \begin{cases} C_0 & \text{pour } t < 0 \\ C_0 + C & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

avec $C > 0$ et constant. Le régime d'évolution de $x(t)$ est de type apériodique critique ; pour ce faire, on règle la valeur du coefficient A.

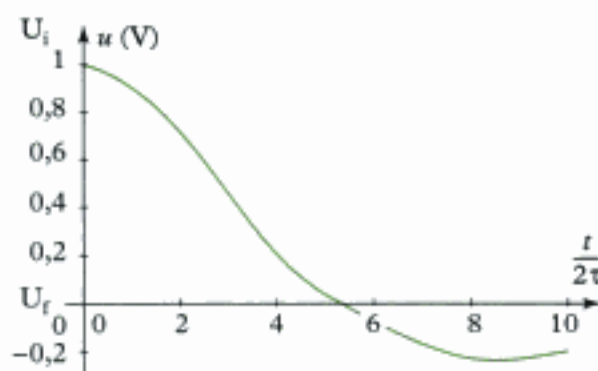
- Exprimer l'évolution temporelle $x(t)$ de x .
- Exprimer et calculer numériquement la valeur de A.
- Exprimer les évolutions temporelles $u(t)$ de u et $v(t)$ de v .
- Parmi les courbes 1, 2 et 3, quelles sont celles qui ne peuvent correspondre à l'évolution de $u(t)$? Justifier.



courbe N° 1



courbe N° 2



courbe N° 3

5) À partir de la courbe retenue supposée exacte, déterminer graphiquement le temps de réponse à 10 % défini comme la durée, comptée à partir de l'application de l'échelon, au bout de laquelle la variation de $x(t)$ est égale à 90 % de la variation totale.

6) On se propose de chercher à réduire le temps de réponse en modifiant la loi de commande, tout en maintenant la contrainte d'un régime transitoire de type apériodique critique. La grandeur u de commande de l'amplificateur est obtenue à partir de la position x et de la vitesse v par la loi :

$$u = A(c - \alpha v - Bx).$$

A et α sont des constantes que nous cherchons à déterminer.

On observe le régime libre du système, à partir de conditions initiales définies par $x(0) = X_0$ et $v(0) = 0$ et du signal de consigne $c(t) = 0$ pour $t > 0$. Les constantes K, B et τ étant inchangées, on désire que la modification de la commande de l'amplificateur de puissance ait pour effet de ramener à 100 ms le temps de réponse à 10 %. Déterminer A et α pour qu'il en soit ainsi.

D'après Écrit, Centrale-Supélec, PSI, 1998.

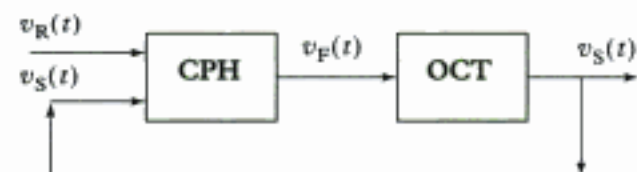
Ex. 9 Démodulation de fréquence

On souhaite transmettre des informations sur une grande distance. Ces informations sont véhiculées par l'intermédiaire d'une onde de haute fréquence que l'on désignera par signal porteur ou « porteuse ». Ce dernier est en général sinusoïdal, nous l'écrirons sous la forme :

$$v_R(t) = V_{RM} \sin(\omega_R t + \psi_R).$$

L'information (de fréquence très inférieure à celle de la porteuse) pourra alors être « incluse » dans le signal porteur, de sorte que les variations de sa pulsation ω_R (ou, ce que revient au même, sa fréquence f_R) autour d'une valeur ω_{R0} (f_{R0}) soient proportionnelles au signal représentant l'information : c'est l'opération appelée modulation de fréquence (FM). Le signal obtenu s'appelle « porteuse modulée » : c'est celui qui sera propagé sur le câble.

L'opération inverse consiste à extraire, en bout de ligne, l'information de la porteuse modulée : on l'appelle la démodulation dont l'élément de base est une boucle à verrouillage de phase (ou PLL pour Phase Locked Loop) décrite sur la figure suivante.

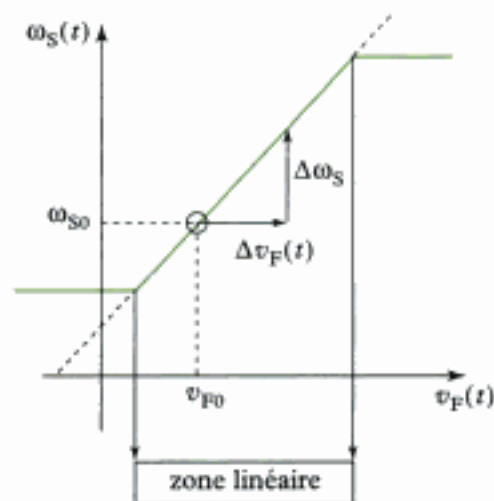


Les éléments qui constituent cette PLL sont :

- Un oscillateur commandé en tension ou (OCT). On désigne ainsi un circuit délivrant une tension sinusoïdale :

$$v_S(t) = V_{SM} \cos(\omega_S t + \psi_S)$$

dont l'excursion de pulsation $\Delta\omega_S(t)$ est proportionnelle à l'amplitude de l'excursion de la tension d'entrée $\Delta v_F(t)$ sur un domaine limité appelé zone linéaire de l'OCT.



On notera que le signal de commande $v_F(t)$ peut être de forme absolument quelconque.

La figure ci-avant décrit sa caractéristique de transfert au voisinage du point de fonctionnement $M_0(V_{F0}, \omega_{S0})$. Il en résulte l'expression :

$$\Delta\omega_S(t) = K_0 \Delta v_F(t)$$

où K_0 est une constante appelée sensibilité de l'OCT.

- Un comparateur de phase (CPH). Ce circuit électronique fournit une tension $v_F(t)$ fonction de la différence de phase instantanée entre les signaux d'entrée, de sorte qu'en notation de Laplace, on ait :

$$V_F(p) = \frac{K_\Phi}{1 + \tau_F p} \Phi(p)$$

où K_Φ et τ_F sont des constantes. Ce circuit est réalisé par l'association d'un multiplieur et d'un filtre passe-bas.

On rappelle la signification de la différence de phase instantanée. Soit deux tensions sinusoïdales :

$$v_R(t) = V_{RM} \sin(\omega_{R0} t + \psi_R)$$

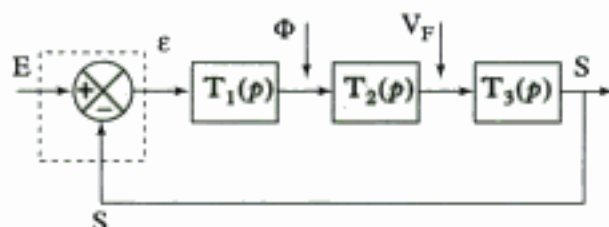
et

$$v_S(t) = V_{SM} \cos(\omega_{S0} t + \psi_S),$$

la différence de phase instantanée est :

$$\Phi(t) = \psi_R(t) - \psi_S(t).$$

Le schéma-bloc de la PLL est présenté ci-dessous :



$E(p)$ représente la variation de la pulsation de la porteuse $\Delta\omega_R(p)$ et $S(p)$ représente la variation de la pulsation du signal de sortie $\Delta\omega_S(p)$.

1) Déterminer les transmittances :

$$T_1(p) = \frac{\Phi(p)}{\epsilon(p)}, \quad T_2(p) = \frac{V_F(p)}{\Phi(p)} \quad \text{et} \quad T_3(p) = \frac{V_F(p)}{S(p)}.$$

On rappelle que :

$$\Delta\omega_R(t) = \frac{d\psi_R(t)}{dt} \quad \text{et} \quad \Delta\omega_S(t) = \frac{d\psi_S(t)}{dt}.$$

2) En déduire la fonction de transfert en boucle fermée :

$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}.$$

L'écrire sous la forme normalisée :

$$T(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega^2}}$$

et donner les expressions de ω_0 et de m .

3) Le système asservi est-il stable ?

4) Que représente la tension $v_F(t)$? En déduire que le système démodule la porteuse et récupère l'information.

D'après Écrit CCP, PSI, 1998.

Indications

Ex. 1 On commence par étudier les boucles internes.

Ex. 6 1) Le bloc $A(p)$ représente l'amplificateur opérationnel.

Pour déterminer $B(p)$ et $C(p)$, il faut étudier l'expression de $e(p)$ en fonction de $E(p)$ et $S(p)$ d'après le montage.

Ex. 7 1) Déterminer la transmittance de la chaîne directe constituée par l'amplificateur opérationnel. Exprimer e en fonction de e et s afin de trouver la transmittance de la chaîne de retour. En déduire A .

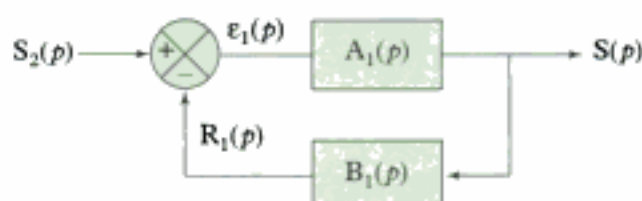
Ex. 8 6) Réaliser le nouveau schéma-bloc du système bouclé. Déterminer la transmittance en boucle fermée et en déduire l'équation différentielle liant $x(t)$ et $C(t)$.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

Afin de calculer la fonction de transfert de ce système, on étudie en premier lieu le système bouclé ayant pour entrée $S_2(p)$ et pour sortie $S(p)$.



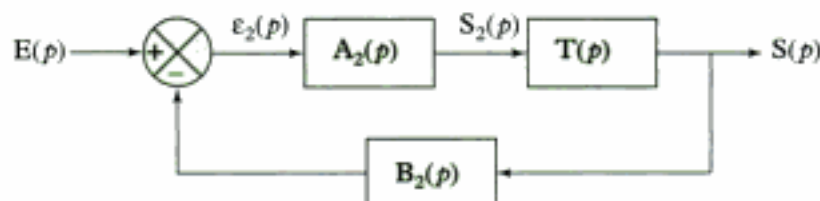
D'après la relation vue en cours pour un système simple de ce type :

$$S(p) = \frac{A_1(p)}{1 + A_1(p)B_1(p)} S_2(p).$$

On note :

$$T(p) = \frac{A_1(p)}{1 + A_1(p)B_1(p)}$$

la transmittance de ce premier système bouclé. Le système devient alors :



Ce qui donne maintenant :

$$H(p) = \frac{A'(p)}{1 + A'(p)B_2(p)}, \text{ où } A'(p) = A_2(p)T(p).$$

On obtient alors :

$$H(p) = \frac{A_1(p)A_2(p)}{1 + A_1(p)B_1(p) + A_1(p)A_2(p)B_2(p)}$$

Exercice 2

1)



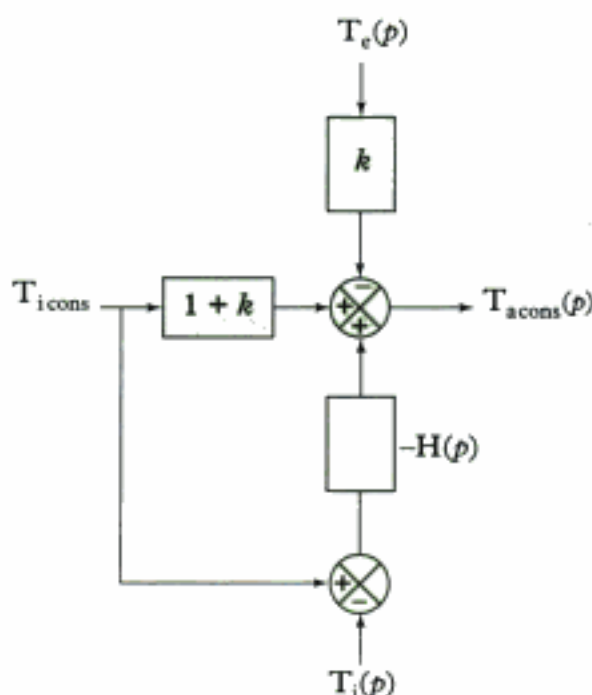
Mettre en œuvre la méthode n° 2.

La transmittance en boucle fermée devient :

$$H(p) = \frac{1}{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^{-3} A - 0,2}$$

Hidden page

On peut alors compléter le schéma-bloc :



3) On obtient :

$$T_{a\text{ cons}}(p) = \left(1 + k - C - \frac{1}{\tau_i p}\right) T_{i\text{ cons}} - k T_e(p) + \left(C + \frac{1}{\tau_i p}\right) T_i(p)$$

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) Pour exprimer la transmittance, il faut partir de l'équation différentielle :

$$\frac{dz(t)}{dt} + \frac{z(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{S'}$$

En associant à $z(t)$ et $e(t)$ les fonctions de la variable de Laplace $Z(p)$ et $E(p)$, on a :

$$p Z(p) + \frac{Z(p)}{\tau} = \frac{E(p)}{S'}, \text{ d'où : } Z(p) \left(\frac{1 + \tau p}{\tau} \right) = \frac{E(p)}{S'}$$

On obtient alors :

$$T(p) = \frac{Z(p)}{E(p)} = \frac{\tau}{1 + \tau p}$$

2)



Pour modéliser ce système dans le but de déterminer ses transmittances (questions 3 et 4), utilisons la méthode n° 1.

• L'amplificateur a pour entrée $e(t)$ et pour sortie $v_A(t)$, donc :

$$v_A(t) = A e(t).$$

Sa transmittance est :

$$T_1(p) = \frac{V_A(p)}{\varepsilon(p)} = A.$$

• L'électrovanne EV a pour signal d'entrée $v_A(t)$ et pour sortie $\Delta D_E(t)$, on a :

$$\Delta D_E(t) = k_v \int_0^t \Delta v_A(t') dt', \text{ avec } \Delta D_E(t=0) = 0.$$

Ainsi :

$$E(p) = \frac{k_v}{p} V_A(p).$$

La transmittance de l'électrovanne est :

$$T_2(p) = \frac{E(p)}{V_A(p)} = \frac{k_v}{p}.$$

• La transmittance du réservoir est d'après la question 1 (entrée : D_E ; sortie : $z(t)$) :

$$T(p) = \frac{\frac{\tau}{S'}}{1 + \tau p}.$$

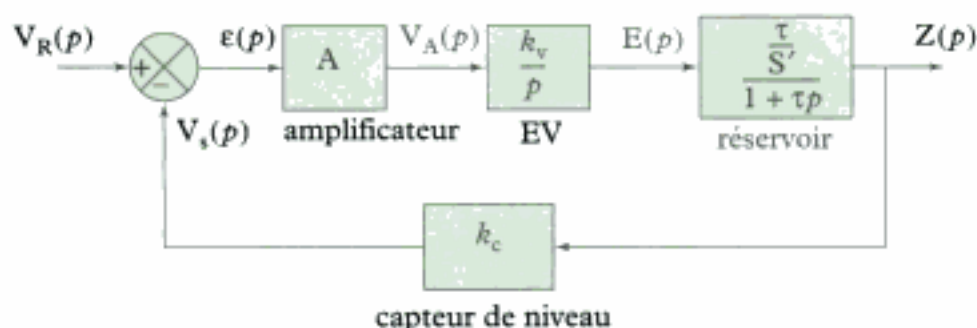
• Le capteur de niveau a pour entrée $z(t)$ et pour sortie $v_s(t)$, ainsi :

$$v_s(t) = k_c z(t).$$

Sa transmittance est :

$$T_3(p) = \frac{V_s(p)}{Z(p)} = k_c.$$

L'ensemble de ces équations se traduisent par le schéma-bloc suivant :



3) D'après la relation vue en cours :

$$H_{BO}(p) = \frac{V_s(p)}{\varepsilon(p)} = A \times \frac{k_v}{p} \times \frac{\frac{\tau}{S'}}{1 + \tau p} \times k_c$$

$$H_{BO}(p) = \frac{\frac{A k_v k_c \tau}{S'}}{p(1 + \tau p)}$$

4) D'après la relation vue en cours :

$$H(p) = \frac{Z(p)}{V_R(p)} = \frac{\left(\frac{A k_v \tau}{S'}\right) \times \frac{1}{(1 + \tau p)p}}{1 + H_{BO}(p)}$$

Hidden page

Hidden page

– Si $B > 0$, il n'existe aucune pulsation ω_c telle que $\text{Arg}(\underline{T}(\omega_c)) = -180^\circ$ car :

$$0 \leq \text{Arg}(\underline{T}(\omega_c)) = -\text{Arctan}\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right) \leq -90^\circ.$$

La notion de marge de gain n'a ici aucun sens puisque le système est toujours stable.

 En effet, nous avons vu que si $B > -\frac{1}{A_0}$, le système est stable. Donc, *a fortiori*, si $B > 0$, il l'est aussi quel que soit A_0 .

– Si $B < 0$, $\text{Arg}(B) = -180^\circ$. L'égalité (1) donne :

$$-180^\circ - \text{Arctan}\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right) = -180^\circ, \text{ d'où : } \omega_c = 0.$$

On calcule alors :

$$M_G = -20 \log|\underline{T}(\omega_c)| = -20 \log \frac{A_0|B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}},$$

soit :

$$M_G = -20 \log(A_0|B|)$$

A.N. $M_G = -20 \log(10^2) = -40 \text{ dB}$.

$M_G < 0$, donc le système est instable.

 Pour que le système soit stable avec $B < 0$, il aurait fallu avoir $M_G > 0$. D'où :

$$-20 \log(A_0|B|) > 0 \Leftrightarrow A_0|B| < 1, \text{ donc : } |B| < \frac{1}{A_0} \text{ et } B > -\frac{1}{A_0}.$$

On retrouve ainsi la condition de stabilité précédente.

Exercice 6

1) • D'après le théorème de Millman :

$$V^-(p) = \frac{CpE(p) + \frac{S(p)}{R}}{\frac{1}{R} + Cp} = \frac{RCpE(p) + S(p)}{1 + RCp}.$$

Comme $\varepsilon(p) = V^+(p) - V^-(p) = -V^-(p)$, il vient :

$$\varepsilon(p) = -\frac{RCp}{1 + RCp}E(p) - \frac{1}{1 + RCp}S(p).$$

• D'autre part, dans le schéma-bloc de l'énoncé :

$$\varepsilon(p) = C(p) \cdot E(p) - B(p) \cdot S(p).$$

Cette expression correspond à celle proposée avec :

$$C(p) = -\frac{RCp}{1 + RCp} \quad \text{et} \quad B(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

Le bloc ayant pour transmittance $A(p)$ modélise l'amplificateur opérationnel, donc :

$$A(p) = \frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_{A_0}}}$$

Hidden page

D'où :

$$A = \frac{s}{\varepsilon} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Ici, comme $\mu_0 = 2 \cdot 10^5$, on est dans le cas type d'un système bouclé avec une chaîne directe à grand gain, donc :

$$\mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \gg 1 \Rightarrow A \approx \frac{\mu_0}{\mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$A.N. \quad A = \frac{2 \cdot 10^5}{1 + 2 \cdot 10^5 \times \frac{1}{1 + 99}} = 100.$$

La contre-réaction a permis de **réduire l'amplification** de l'AO seul ($\mu_0 = 2 \cdot 10^5$).

2) Pour déterminer l'impédance d'entrée du montage, déterminons le courant i_e :

$$i_e = \frac{\varepsilon}{R_{eAO}}$$

$$\text{Or : } \varepsilon = e - r = e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} s = e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mu_0 \varepsilon, \text{ donc :}$$

$$\varepsilon = \frac{e}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \Rightarrow i_e = \frac{e}{R_{eAO} \left(1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)}$$

La résistance d'entrée du montage s'exprime par le rapport :

$$R_e = \frac{e}{i_e} = R_{eAO} \left(1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

$$A.N. \quad R_e = 1 \times \left(1 + 200\,000 \times \frac{1}{1 + 99} \right) = 2 \text{ G}\Omega.$$

La contre-réaction a permis **d'augmenter la résistance d'entrée** du montage.

3) En reprenant les calculs de la question 2 :

$$s = \mu_0 \varepsilon - R_{sAO} i_s = \mu_0 \left(e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \right) - R_{sAO} i_s$$

$$s \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \mu_0 \right) = \mu_0 e - R_{sAO} i_s$$

$$s = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} e - \frac{R_{sAO}}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} i_s$$

D'après cette relation, la sortie du montage s'apparente à un générateur parfait de f.e.m :

$$\frac{\mu_0 e}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

en série avec une résistance de sortie R_s :

$$R_s = \frac{R_{sAO}}{1 + \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Hidden page

Hidden page

On obtient alors l'équation différentielle :

$$KABx(t) + \frac{dx(t)}{dt} + \tau \frac{d^2x(t)}{dt^2} = KA_c(t).$$

$$x(t) + \frac{1}{KAB} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\tau}{KAB} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{1}{B} c(t)$$

4) • Le régime apériodique critique correspond à une solution en régime libre du type :

$$x_\ell(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\frac{t}{\tau_1}}, \text{ or } \alpha, \beta \text{ et } \tau_1 \text{ sont des constantes.}$$

Le régime permanent $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ est :

$$X_0 = \frac{C_0 + C}{B}.$$

La solution pour $x(t)$ est la somme du régime libre et du régime permanent :

$$x(t) = X_0 + x_\ell(t),$$

soit :

$$x(t) = (\alpha + \beta t)e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{C_0 + C}{B}$$

• Dans le cas du régime apériodique, le discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est nul :

$$\left(\frac{1}{KAB}\right)^2 - \frac{4\tau}{KAB} = 0, \text{ d'où : } 1 - 4KAB\tau = 0 \text{ et } A = \frac{1}{4KB\tau}$$

$$A.N. \quad A = \frac{1}{4 \times 0,1 \times 20 \times 50 \cdot 10^{-3}} = 2,5.$$

La racine de l'équation caractéristique est :

$$r = -\frac{\frac{KAB}{\tau}}{2KAB} = -\frac{1}{2\tau}.$$

Ainsi : $\tau_1 = 2\tau$.

• On a :

$$u(t) = A(c(t) - r(t)) = A(c(t) - Bx(t)),$$

ce qui donne :

$$u(t) = A\left(C_0 + C - \left[B(\alpha + \beta t)e^{-\frac{t}{2\tau}}\right] - (C_0 + C)\right).$$

On trouve alors :

$$u(t) = -AB(\alpha + \beta t)e^{-\frac{t}{2\tau}} \text{ et } v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \left(\beta - \frac{\alpha}{2\tau} - \frac{\beta}{2\tau}t\right)e^{-\frac{t}{2\tau}}.$$

• La forme de la réponse pour $u(t)$ n'est pas pseudo-périodique, donc la courbe n°3 ne peut pas correspondre.

La forme de $u(t)$ en régime apériodique critique est proche d'une forme parabolique pour t proche de 0. Donc la courbe n° 2 ne peut pas correspondre.

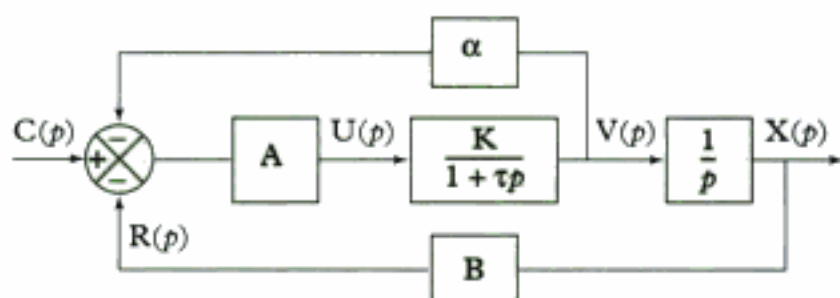
La courbe n°1 peut correspondre.

5) Sur la courbe n° 1, on mesure la valeur de $\frac{t_1}{2\tau}$ pour $u(t_1) = 0,1$, ce qui donne :

$$t_1 = 7\tau = 350 \text{ ms}$$

6) On réalise un schéma-bloc du nouveau système asservi pour en déterminer la transmittance et l'équation différentielle à partir de laquelle on déduit la forme de la réponse $u(t)$.

Le schéma-bloc est le suivant :



On en déduit :

$$X(p) = \frac{KA}{p(1+\tau p)}(C(p) - \alpha V(p) - BX(p)).$$

D'où, sachant que $V(p) = pX(p)$:

$$X(p) = \frac{KA}{p(1+\tau p)}(C(p) - \alpha pX(p) - BX(p)).$$

Ce qui donne :

$$H'(p) = \frac{X(p)}{C(p)} = \frac{\frac{KA}{p(1+\tau p)}}{\frac{KA(B+\alpha p)}{p(1+\tau p)} + 1} = \frac{KA}{KAB + (\alpha KA + 1)p + \tau p^2}.$$

L'équation différentielle qui en découle est alors :

$$KAx(t) = KABx(t) + (1 + \alpha KA)\frac{dx(t)}{dt} + \tau\frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Le régime est apériodique critique si :

$$(1 + \alpha KA)^2 - 4KAB\tau = 0 \quad (1)$$

La constante de temps τ_2 telle que $x(t) = (\alpha' + \beta't)e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ est alors :

$$\tau_2 = \frac{2\tau}{1 + KA\alpha} \quad (2)$$

Le temps de réponse a été divisé par $1 + KA\alpha = 3,5$ dans notre cas. On en déduit :

$$(3,5)^2 - 4KAB\tau = 0, \text{ soit : } A = 30,6$$

D'où la valeur de α :

$$\alpha = \frac{2,5}{KA} = 0,82 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$$

Exercice 9

1) • Par définition, nous avons :

$$\Delta\omega_R(t) - \Delta\omega_S(t) = \frac{d\psi_R}{dt} - \frac{d\psi_S}{dt} = \frac{d}{dt}(\psi_R - \psi_S) = \frac{d}{dt}\Phi(t).$$

Nous en déduisons donc :

$$\varepsilon(p) = \Delta\omega_R(p) - \Delta\omega_S(p) = p\Phi(p), \text{ d'où : } \Phi(p) = \frac{1}{p}\varepsilon(p).$$

Ce qui donne :

$$T_1(p) = \frac{\Phi(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{p}$$

• D'après l'énoncé, $V_F(p) = \frac{K_\Phi}{1 + \tau p} \Phi(p)$, donc :

$$T_2(p) = \frac{V_F(p)}{\Phi(p)} = \frac{K_\Phi}{1 + \tau p}$$

• D'après l'énoncé, $\Delta\omega_S(t) = K_0 \Delta v_F(t)$, ce qui donne :

$$S(p) = \Delta\omega_S(p) = K_0 V_F(p), \text{ d'où : } T_3(p) = \frac{S(p)}{V_F(p)} = K_0$$

2) D'après le schéma-bloc :

$$S(p) = T_3(p)T_2(p)T_1(p)(E(p) - S(p)).$$



Le système asservi est à retour unitaire. La transmittance de la chaîne de retour vaut $B(p) = 1$.

Ce qui donne : $T(p) = \frac{T_1(p)T_2(p)T_3(p)}{1 + T_1(p)T_2(p)T_3(p)}$, d'où :

$$T(p) = \frac{K_0 K_\Phi}{p(1 + \tau p) + K_0 K_\Phi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_0 K_\Phi} p + \frac{\tau}{K_0 K_\Phi} p^2}$$

Par identification avec la forme normalisée : $T(p) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$, on a :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_0 K_\Phi}{\tau}}$$

$$\text{et } m = \frac{\frac{1}{K_0 K_\Phi} \omega_0}{2} = \frac{1}{2\sqrt{K_0 K_\Phi} \tau}$$

3) Les coefficients de p au dénominateur de la transmittance $T(p)$ sont tous positifs : le système est donc **stable**.

4) D'après l'étude, $v_F(t)$ est proportionnelle aux variations de la pulsation $\Delta\omega_S(t)$.

Or le système bouclé asservit les variations de $\Delta\omega_S(t)$ à celles de $\Delta\omega_R(t)$.

Cependant les variations de la pulsation de la porteuse sont proportionnelles au signal constituant l'information.

Donc le signal $v_F(t)$ représente, à une constante multiplicative près, **l'information transmise**.

Hidden page

Progression suivie dans le chapitre

À partir des définitions (paragraphe A et B), nous avons voulu réfléchir à l'aspect théorique et pratique de la notion d'oscillateur quasi sinusoïdal (paragraphe C et D) pour montrer toute la finesse physique de ces oscillateurs dont la position, à la limite des domaines de stabilité et d'instabilité des systèmes, situe immédiatement la difficulté d'approche.

L'exploitation de cette réflexion, suivie de l'énoncé de la condition de Barkhausen (et de ses conséquences, paragraphe E), véritable épiscentre du chapitre, permettent alors de laisser libre cours à l'imagination pour construire des oscillateurs quasi sinusoïdaux (paragraphe F).

Deux exemples mettront en application ces notions :

- l'oscillateur de Wien (paragraphe G et H) ;
- un oscillateur à réseau déphaseur (paragraphe I).

Le cas de l'oscillateur à résistance négative (paragraphe J) sera ensuite abordé (en montrant qu'il est aussi un oscillateur à réaction positive, au même titre que les deux oscillateurs précédents).

Les limites de ces oscillateurs, ayant été mises en évidence, nous aborderons les solutions techniques permettant d'obtenir des oscillateurs haute fréquence (paragraphe K).

A. Oscillateur

Définition 1

On appelle **oscillateur** un générateur qui délivre un signal périodique :
– en l'absence de signal périodique extérieur à l'oscillateur ;
– en étant alimenté par une source d'énergie continue¹.

1. Dans une montre « à quartz », la pile est le générateur de tension continue qui alimente un oscillateur. Cet oscillateur crée un champ électrique qui met en vibration le quartz. Celui-ci constitue l'étalon de fréquence car il vibre à une fréquence bien déterminée (32 768 Hz par exemple). Cette fréquence est ensuite divisée pour obtenir la fréquence de 1 Hz ou, ce qui est équivalent, la période de 1 s.

2. Pour que les harmoniques secondaires aient un effet négligeable, il suffit que la somme des carrés de leurs amplitudes soit négligeable devant le carré de l'amplitude de l'harmonique principal. Voir la notion de distorsion au chapitre 1.

3. Nous ne traiterons pas des oscillateurs à portes logiques, conformément au programme.

Cette définition implique que le signal périodique est auto-entretenu.

B. Oscillateur quasi sinusoïdal

Définition 2

On appelle **oscillateur quasi sinusoïdal** un oscillateur qui génère un signal comprenant un harmonique principal et des harmoniques secondaires à faible effet sur le signal sinusoïdal². La forme du signal est alors proche d'une sinusoïde (dite quasi sinusoïde)³.

C. Éléments structurels d'un oscillateur quasi sinusoïdal

C.1. Nécessité d'une instabilité d'un système linéaire

Nous avons déjà rencontré plusieurs fois des oscillations de systèmes linéaires dans les chapitres précédents (comme, par exemple, avec le dérivateur). Leur interprétation a toujours été liée à l'instabilité du système. De même, nous avons vu qu'un système bouclé linéaire peut devenir instable et générer des oscillations. Nous retiendrons donc l'instabilité d'un système linéaire comme source d'oscillations.

1. Sans que cela soit une obligation, nous ne considérerons que des filtres passifs et, ce qui est le plus simple, linéaires.

2. Le signal ne peut se maintenir que si un composant actif lui transfère de l'énergie depuis la source continue.

3. De fait, comme nous le verrons, le domaine non-linéaire de l'amplificateur sera cependant déterminant.

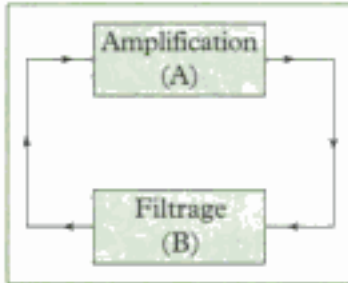


Fig. 1 - Bouclage de la fonction amplification et de la fonction filtrage. A désignera la chaîne d'action et B la chaîne de filtrage.

4. Nous supposons que la chaîne directe et la chaîne de retour sont des systèmes stables.

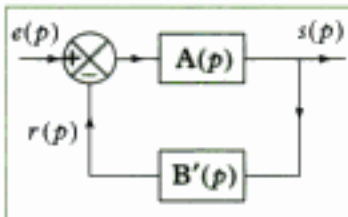


Fig. 2 - Schéma fonctionnel d'un système à réaction négative.

5. Comme nous le verrons, ceci traduit le fait que l'on a un signal de sortie non nul pour une entrée très petite.

C.2. Nécessité d'un filtre

La fréquence du signal ne peut être ajustée de manière précise que grâce à une sélection par filtrage¹.

C.3. Nécessité d'une amplification

La présence d'un filtre passif et, de manière générale, la présence de composants résistifs, conduit à une atténuation du signal. Il y a donc nécessité d'amplifier le signal.

Ce rôle est assuré par le composant actif², dont le plus simple est qu'il soit linéaire³. Dans la suite de ce chapitre, l'amplification sera assurée par un montage où l'AO sera considéré comme idéal, ou en situation de l'être.

C.4. Structure d'un oscillateur quasi sinusoïdal

Un oscillateur quasi sinusoïdal est donc un système instable. En électronique, l'instabilité est obtenue par bouclage à partir des fonctions stables amplification et filtrage.

Le filtre, qui a pour rôle de sélectionner la fréquence d'oscillation, est généralement passif. Aussi, l'amplificateur compense les pertes d'énergie, et de niveau du signal, dues au filtre.

D'autres critères entrent en ligne de compte de manière indirecte pour déterminer la structure finale qui doit être :

- minimale ;
- limitée en coût et en mise en œuvre.

Pour cela, l'électronique spécialise les chaînes, c'est-à-dire confie un nombre limité de fonctions à une chaîne, ce que nous faisons en choisissant une fonction amplification et une fonction filtrage (fig. 1).

D. Critères de fonctionnement d'un oscillateur quasi sinusoïdal

Dans ce chapitre, les notations sont celles utilisées au chapitre 5 sur les systèmes asservis.

D.1. Fonction de transfert d'un système linéaire à réaction négative

À partir de la figure 2, nous reprenons les résultats concernant la théorie des systèmes linéaires bouclés⁴. La fonction de transfert d'un tel système, d'entrée e et de sortie s , est, en notation symbolique :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B'(p)}$$

Dans le cas où $1 + A(p)B'(p) = 0$, la fonction de transfert devient infinie, ceci quel que soit le signal d'entrée, ce qui fait que la sortie devrait devenir infinie⁵.

Dans la pratique, cette conséquence entraînera la saturation de l'élément actif.

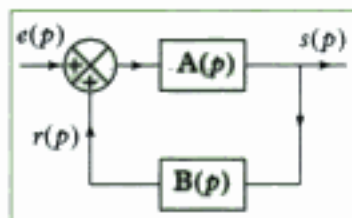


Fig. 3 - Schéma fonctionnel d'un système à réaction positive.

1. Le coefficient -1 correspond à un changement de notation.

2. Cf. définition 1.

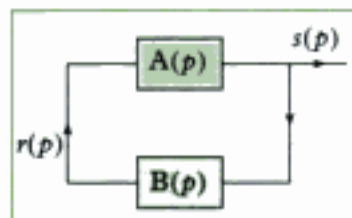


Fig. 4 - Structure de boucle fermée.

3. S_m est l'amplitude ;
 ω_s la pulsation propre ;
 m le coefficient d'amortissement ;
 ω la pseudo-pulsation ;
 φ la phase à l'origine.

4. Bien considérer que le système du deuxième ordre évoqué ici, dont un exemple est le filtre RLC vu en première année, n'est pas seul dans la boucle. Dans ce cas, il y a aussi un amplificateur...

D.2. Fonction de transfert d'un système linéaire à réaction positive

Nous utiliserons la rétroaction positive comme source d'instabilité. Aussi, nous donnons une autre modélisation (fig. 3) pour ce système linéaire bouclé dont la fonction de transfert s'écrit alors, en posant $B(p) = -B'(p)$ ¹ :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$$

D.3. Structure de boucle fermée

Dans le cas particulier où l'entrée est nulle, cas qui nous intéresse², le schéma se simplifie encore et l'on obtient une boucle (fig. 4) dont les équations de fonctionnement sont :

$$s(p) = A(p)r(p) \quad \text{et} \quad r(p) = B(p)s(p).$$

Nous obtenons alors : $s(p) = A(p)B(p)s(p)$, donc :

$$A(p)B(p) = 1.$$

Propriété 1

Une structure de boucle (A, B) fermée avec $A(p)B(p) = 1$ permet de réaliser un oscillateur.

D.4. Conditions d'existence des oscillations

D.4.1 - Ordre de la boucle

Nous souhaitons obtenir un régime quasi sinusoïdal en sortie. Les circuits que nous connaissons, capable de produire ce type de signal, sont du deuxième ordre et conduisent à une solution du type :

$$s(t) = S_m \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (1).$$

Propriété 2

Pour obtenir des oscillations, l'ordre de la boucle est au minimum égal à deux⁴.

D.4.2 - Naissance des oscillations

En réalité, l'entrée n'est jamais nulle, bien qu'aucune tension n'y soit appliquée par l'expérimentateur. Pour autant, nous ne connaissons jamais cette tension car elle est constituée du bruit électronique. De la sorte, le schéma fonctionnel à considérer lors du démarrage est celui de la figure 3, avec :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}.$$

– Si le système est stable (cas où $m > 0$), le signal d'entrée génère un signal transitoire amorti en sortie, donnée par la relation (1), signal qui disparaît au bout d'une durée liée à la valeur de la constante d'amortissement m .

– Pour que les oscillations naissent en sortie, elles doivent augmenter d'amplitude, et bien au-delà de celle du bruit. Il est donc nécessaire que le facteur d'amortissement soit négatif ($m < 0$).

Ce résultat s'écrit aussi sous une autre forme :

Propriété 3

Pour obtenir des oscillations, pour un ordre de boucle égal à deux, la partie réelle des racines (ou pôles) de l'équation $A(p)B(p) = 1$ doit être **positive**.

Nous voyons immédiatement l'importance de la notion de transmittance de boucle $T(p) = A(p)B(p)$, dite aussi transmittance « en boucle ouverte », et nous rencontrons de nouveau l'instabilité du système car si aucun élément n'intervient, la sortie diverge sans limite. Dans la pratique, la chaîne d'amplification est l'élément qui limite cette divergence¹.

1. Un système est en boucle ouverte si on ouvre la boucle au niveau de la chaîne de retour.

Définition 3

Un oscillateur est un **système bouclé instable à réaction**, composé d'un amplificateur et d'un filtre (généralement passif), qui, placé à la limite de stabilité, délivre un signal de sortie sans être excité par un signal extérieur périodique.

Remarques

- Cette limite de stabilité est appréciée à l'aide du coefficient d'amortissement m qui, idéalement, devrait prendre la valeur nulle.
- D'un point de vue physique, m doit être négatif pour assurer l'existence des oscillations. Cependant :
 - une valeur de m négative trop proche de $m = 0$ n'est pas souhaitable car une petite variation des paramètres dont dépend m permettrait d'atteindre $m > 0$; les oscillations seraient alors amorties ;
 - une valeur trop grande de $|m|$, avec $m < 0$, conduirait à des oscillations non quasi sinusoïdales, très déformées.

Comme nous le voyons, le régime quasi sinusoïdal des oscillateurs à réaction est lié à leur conception qui doit répondre à des critères précis.

E. Condition d'oscillation en régime harmonique

E.1. Condition de Barkhausen

Le régime harmonique est le plus adapté pour étudier la transmittance de chaque élément de la boucle, ou de la boucle ouverte.

Cependant, ce régime harmonique ne correspond pas au régime exact de fonctionnement décrit précédemment, lié à l'instabilité. Mais il reste une bonne approximation du régime réel. L'examen des conditions d'oscillation en régime harmonique est donc particulièrement intéressant.

Ce cas correspond à la réponse libre du système, avec $m = 0$; les pôles sont alors imaginaires conjugués ($\pm j\omega_0$). En posant $p = j\omega$, nous avons alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 - \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)}$$

$A(p)B(p) = 1$ conduit à :

$$\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1 \quad ^2$$

2. La condition équivalente est $\underline{AB}' = -1$ dans le cas de l'écriture de la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{s}(p)}{\underline{e}(p)} = \frac{\underline{A}(p)}{1 + \underline{A}(p)\underline{B}'(p)}$$

Définition 4

1. Qui est ici le régime libre du système bouclé sans entrée.

La condition d'oscillation en régime harmonique¹ est :

$$\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1.$$

Elle est appelée **condition de Barkhausen** et porte à la fois :

– sur les modules :

$$|\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| = |\underline{A}(j\omega)||\underline{B}(j\omega)| = 1 ;$$

– sur les arguments :

$$\arg[\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)] = \arg[\underline{A}(j\omega)] + \arg[\underline{B}(j\omega)] = 0 \text{ (modulo } 2\pi),$$

qui s'écrit encore :

$$\arg[\underline{A}(j\omega)] = -\arg[\underline{B}(j\omega)] \text{ (modulo } 2\pi).$$

– Dans tous les systèmes que nous étudierons, la *fréquence des oscillations* est fixée par la fréquence f_0 (ou la pulsation ω_0) unique qui vérifie la relation entre les arguments.

– L'équation sur les modules impose la *condition d'amplification*.

– L'oscillateur doit osciller dès sa mise sous tension alors qu'aucune entrée ne lui est appliquée. Or, le bruit électronique est composé de signaux de fréquences diverses dont une au moins se confond avec la fréquence d'oscillations. Ce signal est amplifié, renvoyé et filtré par la chaîne de retour, amplifié, et ainsi de suite...

E.2. Condition de Barkhausen et diagramme de Bode

• La condition de Barkhausen est applicable sur toute représentation graphique de la transmittance $\underline{T}(j\omega) = \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)$.

Considérons le diagramme de Bode² $G(x)$, $\varphi(x)$ suivant pour la transmittance en boucle $\underline{T}(j\omega) = \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)$ (fig. 5a et 5b) d'un filtre de Wien étudié dans ce chapitre (fig. 4a et 4b). Pour obtenir des oscillations harmoniques, il faut que simultanément nous ayons $G(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$.

2. Avec $G(x) = 20\log|\underline{T}(jx)|$ et $\varphi(x) = \arg[\underline{T}(jx)]$,

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est une variable réduite.

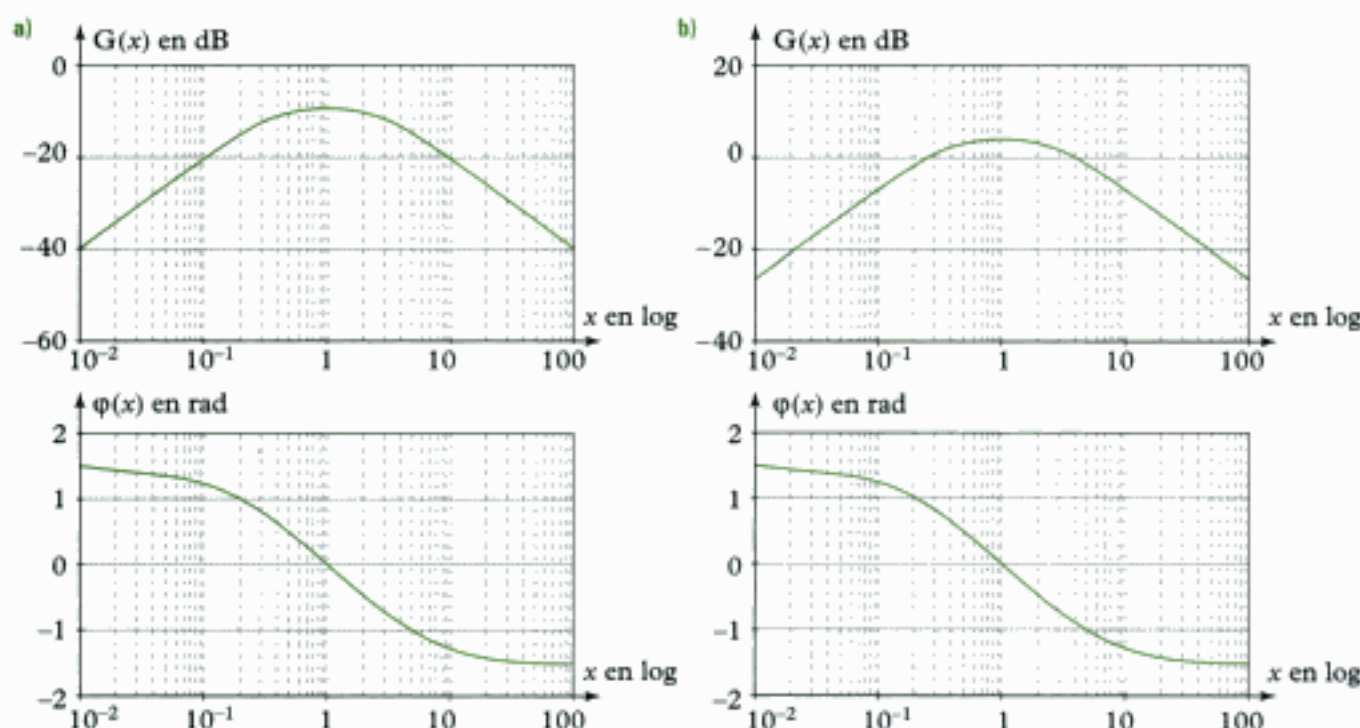


Fig. 5 - Diagrammes de Bode du filtre de Wien.

Sur la **figure 5a**, avec x une variable réduite du type $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, nous remarquons que la recherche de la condition $\varphi(x) = 0$ admet une solution en $x = 1$.

Par contre, il n'y a pas de solution pour $G(x) = 20\log|T(j\omega)| = 0$.

Les oscillations quasi sinusoïdales sont impossibles. Le système est stable.

Sur la **figure 5b**, nous avons augmenté le gain de la chaîne d'amplification de $20\log(5) = 13,9$ dB. La courbe de phase ne change pas. Cette fois, la courbe $G(x) = 0$ dB coupe le diagramme de Bode de l'amplitude en deux points x_1 et x_2 . Le système est instable.

Pour obtenir des oscillations sinusoïdales à partir de cette situation, il faut :

- soit baisser le gain et l'amener à 0 dB pour $x = 1$, sans modifier l'allure de la courbe de gain¹ et la courbe de phase ;
- soit modifier la phase afin de traduire la courbe de phase et faire coïncider la valeur de x correspondant à $G(x) = 0$ avec celle de $\varphi(x) = 0$, sans modifier la courbe de gain.

Ces deux opérations possibles sont appelées **correction** ou **compensation**.

• Marge de gain – Marge de phase

De même qu'un système stable ne doit pas se rapprocher de l'instabilité, ici le système instable ne doit pas se rapprocher de la stabilité ; les marges de gain et de phase précisent cette contrainte (cf. chapitre 5).

F. Réalisation pratique d'un oscillateur à réaction positive

F.1. Spécialisation des chaînes

Nous devons donc réaliser les conditions de Barkhausen :

$$T(j\omega) = |A(j\omega)| |B(j\omega)| = 1$$

et $\arg(A(j\omega)) + \arg(B(j\omega)) = 0 \pmod{2\pi}$.

Comme la condition sur les modules ne sera pas difficile à réaliser, nous nous limiterons, pour des raisons pratiques, à quelques cas simples donnant la condition de phase :

- si l'une des deux chaînes introduit un déphasage nul, l'autre chaîne introduit elle aussi un déphasage nul ;
- si l'une des deux chaînes introduit un déphasage $\pm\pi$, l'autre chaîne introduit elle aussi un déphasage $\pm\pi$.

Remarquons que :

- si $\arg(B) = 0$, alors B est un réel positif et en conséquence A est aussi un réel positif (puisque $AB = 1$) ;
- si $\arg(B) = \pm\pi$, alors B est un réel négatif et en conséquence A est aussi un réel négatif.

F.2. Schéma général d'un oscillateur à réaction

- En termes de liaisons bifilaires, nous devons réaliser les montages de la **figure 6**.

1. Dans le cas d'un oscillateur de Wien, dans le modèle de l'AO parfait, l'amplification $A(j\omega)$ est réelle quelle que soit ω . C'est donc ce paramètre que l'on règle pour obtenir les oscillations.

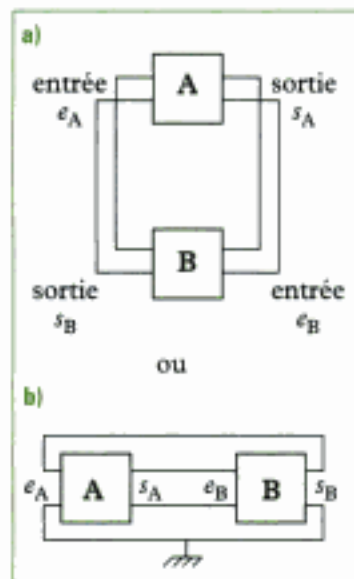


Fig. 6 - Les deux figures sont des représentations identiques d'une structure bouclée. La figure b) est utile pour prendre en compte la présence obligatoire de la masse nécessaire à tout circuit électronique.

Hidden page

Hidden page

G.3. Montage

Le montage de l'oscillateur à pont de Wien est donc celui de la figure 10.

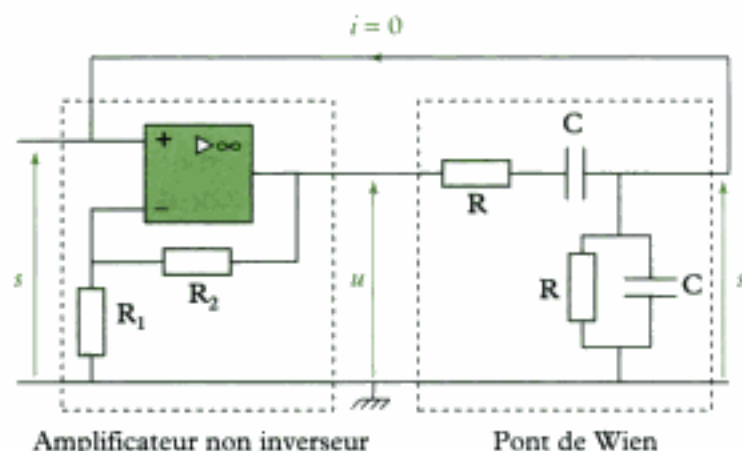


Fig. 10 - Oscillateur de Wien.¹

1. Pour un système bouclé, la notation e ou s est arbitraire, une entrée d'un composant correspondant à une sortie d'un autre composant. Cependant il faut prélever le signal de sortie qui est plus avantageux en qualité (ici à la sortie du pont de Wien).

L'oscillateur ainsi construit vérifie les critères retenus précédemment pour le système bouclé :

- système instable ;
- réaction positive ;
- boucle formée d'un amplificateur et un filtre ;
- ordre de la boucle égal à 2 ;
- signal d'entrée nul ;
- vérifiant pour une pulsation ω_0 donnée la condition de Barkhausen sur les modules :

$$|\underline{A}(j\omega_0)\underline{B}(j\omega_0)| = 1 ;$$

- placé en limite de stabilité.

Cette dernière condition nous indique qu'il faut modifier soit $|\underline{A}(j\omega_0)| = A_0$, soit $|\underline{B}(j\omega_0)|$ du montage précédent pour obtenir les oscillations. Dans ce cas, le plus simple consiste à augmenter légèrement l'amplification A_0 en jouant sur R_1 et R_2 .

G.4. Équation différentielle vérifiée par $s(t)$

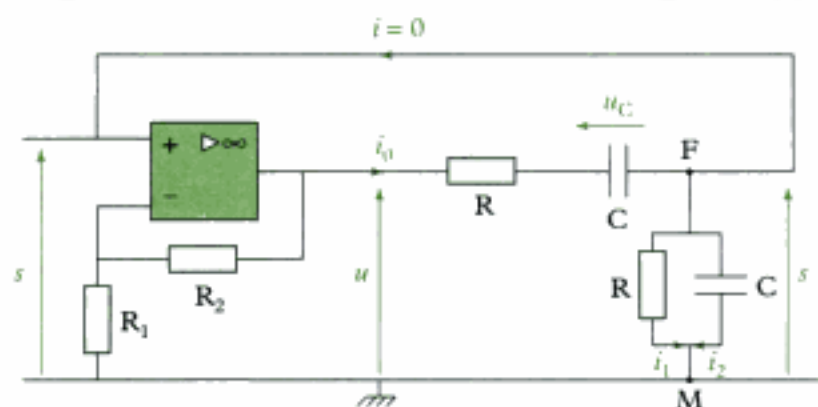


Fig. 11 - Oscillateur de Wien.

Établissons l'équation différentielle en $s(t)$. Nous avons (fig. 11) :

$$i_0 = i_1 + i_2 = \frac{s}{R} + C \frac{ds}{dt} \text{ et } u = Ri_0 + u_C + s$$

$$\text{donc : } u = R \left(\frac{s}{R} + C \frac{ds}{dt} \right) + u_C + s = s + RC \frac{ds}{dt} + u_C + s \quad (2)$$

$$\text{Or, } \frac{du_C}{dt} = \frac{i_0}{C} = \frac{1}{C} \left(\frac{s}{R} + C \frac{ds}{dt} \right) = \frac{s}{RC} + \frac{ds}{dt} \text{ et } u = A_0 s.$$

En dérivant la relation (2) par rapport au temps, nous obtenons :

$$A_0 \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} + RC \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{s}{RC} + \frac{ds}{dt} + \frac{ds}{dt}$$

et finalement :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} \left(\frac{3 - A_0}{RC} \right) + \frac{s}{R^2 C^2} = 0$$

Cette équation différentielle en s valable à tous régimes s'écrit sous forme normalisée :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } m = \frac{3 - A_0}{2}.$$

L'amplification A_0 influence le signe de m qui fixe l'allure des solutions selon :

$$s(t) = S_m \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega t + \varphi) \quad ^2$$

- Si $A_0 < 3$, alors $m > 0$ et les oscillations sont amorties.

- Si $A_0 = 3$, alors $m = 0$ et les solutions sont sinusoïdales du type :

$$s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

D'un point de vue pratique, la condition $A_0 = 3$ ne peut être réalisée exactement. Si elle est appliquée au système, la moindre variation des paramètres de l'amplification, par exemple, peut faire passer à $A_0 < 3$ et les oscillations disparaissent progressivement, ce qui n'est pas souhaité.

Dans la pratique, nous prendrons donc plutôt comme condition d'oscillation $A_0 > 3$.

- Si $3 < A_0 < 5$, alors $m < 0$ et les solutions sont divergentes ; leur amplitude ne fait que croître, jusqu'à la saturation de l'amplificateur³.

G.5. Fonctionnement de l'oscillateur de Wien : importance des non linéarités

Pour le pont de Wien dont les caractéristiques sont celles de l'application 1, $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 33 \text{ nF}$, $f_0 = 432 \text{ Hz}$, $\omega_0 = 3030 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, observons les signaux u et s ⁴ au cours du temps en faisant varier R_2 .

G.5.1 - Première étude

• Résultats expérimentaux

Nous choisissons $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$, donc $A_0 = 4$, ce qui donne :

$$m = -0,5.$$

L'écart relatif à la valeur limite de A_0 est :

$$\frac{4 - 3}{3} = 33 \text{ } \%$$

Nous représentons ensuite les chronogrammes de $u(t)$ la tension à la sortie de l'amplificateur opérationnel et de $s(t)$ la tension à la sortie du filtre de Wien (fig. 12), puis les spectres de $u(t)$ et de $s(t)$ (fig. 13a et 13b), ainsi que les trajectoires de phase des tensions $u(t)$ (fig. 14a) et $s(t)$ (fig. 14b).

1. ω_0 est la pulsation propre et m le facteur d'amortissement.

2. Avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ en condition d'oscillations. Si $m = 0$, on a bien $\omega = \omega_0$.

3. Dans ce dernier cas, précisons la condition sur les résistances :

$$3 < A_0 < 5 \Rightarrow 3 < 1 + \frac{R_2}{R_1} < 5$$

$$\text{donc } 2R_1 < R_2 < 4R_1.$$

Si $A_0 \geq 5$, $m \leq -1$; le régime n'est plus oscillatoire.

4. u est le signal à la sortie de l'amplificateur ainsi qu'à l'entrée du filtre (fig. 10).

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Ainsi, la forme de la trajectoire de phase de la tension $s(t)$ se rapproche encore plus d'une ellipse. Le mouvement est donc **quasi sinusoïdal**, comme le montre le spectre de $s(t)$ (fig.19) avec un seul pic significatif vers 480 Hz. Le taux de distorsion approche la valeur nulle.

G.5.4 - Origine, importance et effet du fonctionnement en régime non linéaire

• Point limite de fonctionnement en régime non linéaire

Lorsque l'oscillateur fonctionne, la tension $u(t)$ de sortie de l'AO est égale à la tension d'entrée du filtre. Dans le cas de la deuxième étude, nous traçons alors $u = f(s)$ pour l'amplificateur, à la fréquence f_0 (courbe en trait plein de la figure 21, de pente 3,2 dans la partie linéaire, saturant ensuite à 15 V).

Nous traçons ensuite la courbe $u = g(s)$ pour le filtre, à la fréquence f_0 ; comme $s = B_0 u$, nous avons :

$$u = \frac{s}{B_0}, \text{ avec } B_0 = \frac{1}{3}.$$

Nous obtenons la courbe en pointillés.

L'intersection de ces deux tracés donne le point de fonctionnement de l'oscillateur lors du régime non linéaire. Ce point se situe dans la zone de saturation de l'amplificateur. Dans ces conditions, l'oscillateur de Wien fonctionnera en régime saturé pendant une certaine durée. Cette interprétation ne prend pas en compte les effets dus au filtrage effectué par la chaîne passive.

• Effet de la non linéarité de l'AO

Comme le montre les chronogrammes de la deuxième étude, la tension filtrée s continue à évoluer (croissance, puis décroissance) pendant la saturation de l'amplificateur. Ceci est dû au filtrage de la tension écrêtée $u(t)$, décomposable en harmoniques selon Fourier. D'une part, le point de fonctionnement réel diffère alors de $s = B_0 V_{\text{sat}}$, en lui étant supérieur; d'autre part, la non sélectivité du filtre passif permet la transmission de divers harmoniques. Le signal $s(t)$ est donc non sinusoïdal et présente un taux de distorsion.

À la décroissance de la tension filtrée, l'amplificateur rejoint sa zone de fonctionnement linéaire; il sort de la saturation.

G.6. Limitation en fréquence due à l'AO

L'amplificateur non inverseur est lui-même un circuit bouclé. Nous avons vu au chapitre 3 que sa fonction de transfert pouvait se mettre sous la forme rappelée ci-dessous :

$$\underline{T} = \frac{\mu_0}{\left[1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}\right]} \frac{1}{\left[1 + j \frac{\omega}{\left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}\right) \omega_{AO}}\right]}$$

Comme l'amplification différentielle statique est grande ($\mu_0 \gg 1$), la fonction de transfert peut s'écrire¹ :

$$\underline{T} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + j \frac{\omega}{\frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \omega_{AO}}} \quad (3)$$

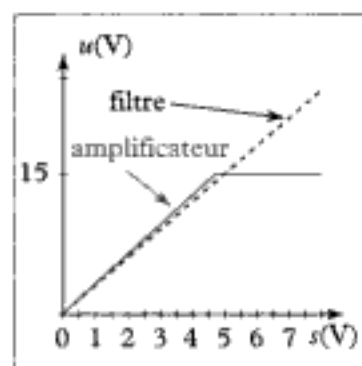


Fig. 21 - Détermination graphique du point de fonctionnement dans la partie non linéaire. Seule la saturation positive est considérée. La saturation négative s'obtient par symétrie par rapport à l'origine.

1. μ_0 et ω_{AO} sont respectivement l'amplification différentielle statique et la pulsation de coupure de l'AO : $\mu_0 = 2 \cdot 10^5$ et $\omega_{AO} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour un LM741.

Dans l'établissement de la pulsation de résonance de l'oscillateur de Wien, nous avons supposé que :

$$\underline{T} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (4)$$

Afin que les équations (3) et (4) soient satisfaites simultanément, il faut donc que :

$$\omega_0 \ll \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \omega_{AO}.$$

Numériquement, avec $R_2 = 2R_1$ et les valeurs classiques de μ_0 et ω_{AO} , nous obtenons :

$$\omega_0 \ll \frac{2 \times 10^5}{3} \times 50 = 3 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad f_0 \ll 530 \text{ kHz}.$$

Cet oscillateur de Wien, qui ne peut générer que des signaux de fréquences comprises dans la gamme du kHz, est donc limité en haute fréquence.

Conclusion : L'oscillateur à pont de Wien envisagé est donc un médiocre oscillateur quasi sinusoïdal puisque :

- la bande passante du filtre est large ;
- la distorsion atteint vite des valeurs élevées ;
- il est limité aux fréquences de quelques kHz ;
- il est difficile à régler.

Une amélioration est possible avec la commande automatique de gain, système rétroactionné (asservissement) qui empêche la saturation et permet d'obtenir, cette fois, un signal quasi sinusoïdal.

Pour cela, il faut introduire un élément non linéaire à la place de R_1 ou R_2 dans la chaîne directe (amplification), comme par exemple une thermistance (résistance variant avec la température) ou une ampoule à incandescence (résistance variant avec la tension) ; le taux de distorsion vaut alors 10^{-5} à la fréquence de 1 kHz, ce qui est excellent.

G.7. Utilisation de la modélisation de l'AO pour établir la transmittance de la boucle

Le régime est supposé harmonique. Nous introduisons ici une deuxième méthode de détermination de la transmittance.

Nous ouvrons la boucle de rétroaction (fig. 11) de manière à disposer de la chaîne formée par (A) et (B) en série entre l'entrée et la sortie. Nous modélisons l'AO comme indiqué au chapitre 3, ce qui donne la figure 22.

Le calcul de la transmittance est alors immédiat :

$$\underline{T} = \underline{AB} = \frac{s}{e} = \frac{s}{u} \frac{u}{e} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} \frac{A_0 e}{e} = A_0 \frac{Z_p}{Z_s + Z_p} = A_0 \frac{B_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)},$$

en utilisant l'expression de $\frac{Z_p}{Z_s + Z_p}$ établie au paragraphe G.1.

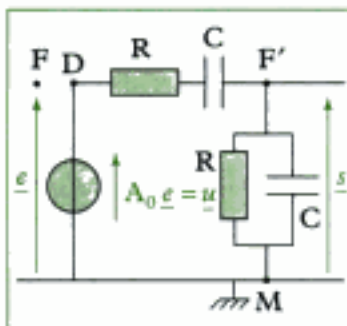


Fig. 22 - Modélisation de l'AO (entrée en F, sortie en D), la boucle étant ouverte.

Remarque : dans l'ouverture de la boucle, il faut respecter la constitution du circuit. Dans le cas particulier du système bouclé de la figure 11, la sortie du filtre voit une impédance infinie constituée par l'entrée de l'étage d'amplification non inverseur. Quelle que soit cette impédance, elle doit être reportée à la sortie du filtre lorsque la boucle est ouverte.

Hidden page

Hidden page

Remarque : contre toute attente, la rétroaction ou réaction négative est ici instable. Ceci est dû à l'enchaînement des filtres passe-haut du type C, R du réseau réactif qui permet d'obtenir un déphasage de 180° pour une fréquence donnée. La réaction négative est alors transformée en réaction positive.

Ceci explique les oscillations observées dans les précédents chapitres avec un AO réactionné négativement, du type amplificateur inverseur.

En effet, l'intérieur d'un AO contient plusieurs filtres passe-bas en cascades, et pour certaines fréquences, la différence de phase atteint 180° .

J. Oscillateur à résistance négative

J.1. Intérêt d'une résistance négative

Comme vu en première année, un circuit RLC (fig. 27) peut être le siège d'oscillations libres amorties à la fermeture du circuit, le condensateur étant chargé à l'instant initial. L'équation différentielle est alors :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad (9), \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

La solution oscillante libre est :

$$u_C(t) = \exp(-m\omega_0 t) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

où ω est la pseudopulsation ($\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$), et A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Avec $m = 0,09$ et $f_0 = 482 \text{ Hz}$ ¹, nous obtenons les représentations graphiques de $u_C(t)$ (fig. 28) et de la trajectoire de phase de $q(t)$ donc de $u_C(t)$ (fig. 29).

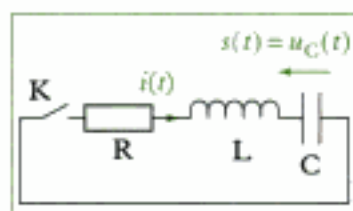


Fig. 27 - Oscillations du dipôle RLC à la fermeture du circuit. Dans cet exemple, nous supposons : $u_C(t=0) = 5 \text{ V}$; $R = 60 \Omega$; $L = 0,109 \text{ H}$; $C = 1 \mu\text{F}$.

1. Avec les valeurs indiquées précédemment en figure 27.

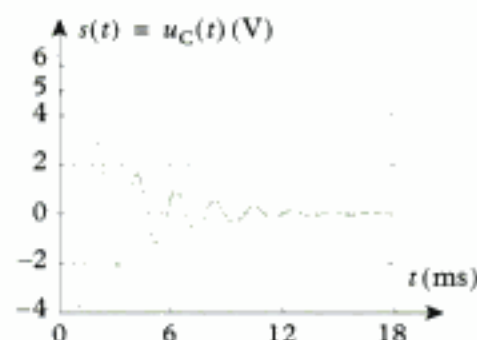


Fig. 28 - Évolution de $s(t) = u_C(t)$.

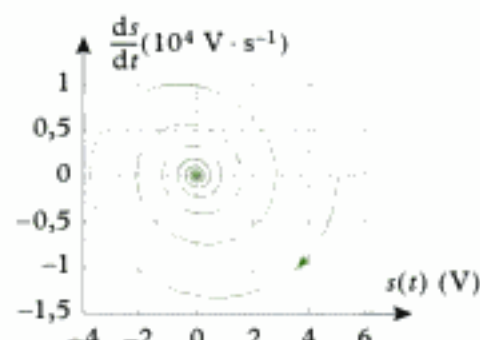


Fig. 29 - Trajectoire de phase de $s(t) = u_C(t)$.

La décroissance d'amplitude des oscillations est due à la résistance du circuit et intervient dans les équations par l'intermédiaire du facteur d'amortissement :

$$m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Pour obtenir des oscillations sinusoïdales, l'idée est donc de rendre la résistance du circuit nulle par ajout d'une résistance négative :

$$R_n = -R$$

Dans ce cas, les oscillations sont sinusoïdales puisque :

$$m = \frac{R_T}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{(R + R_n)}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{(R - R)}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0.$$

2. Ici, le régime est peu amorti.

Hidden page

Hidden page

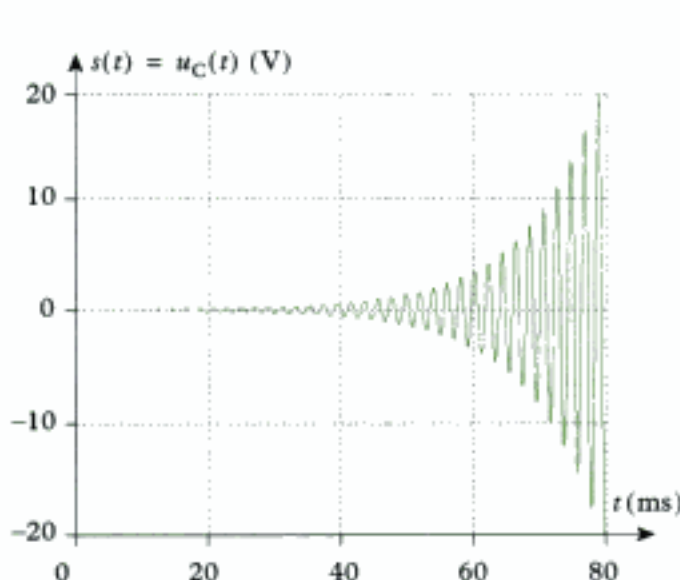


Fig. 36 - Évolution de $u_C(t)$ si $m = -0,03$, en l'absence de saturation de l'amplificateur.

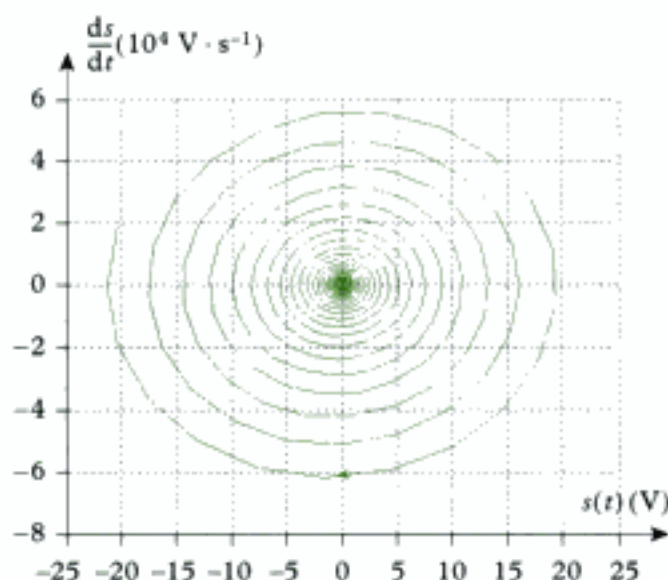


Fig. 37 - Trajectoire de phase de $s(t) = u_C(t)$ si $m = -0,03$ en l'absence de saturation de l'amplificateur.

J.4. Aspect énergétique

Si l'on a $R_n = -R$, pour le circuit, la puissance $\mathcal{P}_R = Ri^2$ reçue par R est compensée par celle fournie par la résistance négative $\mathcal{P}_{-R} = -Ri^2$. Le circuit fonctionne sans amortissement énergétique apparent.

J.5. L'oscillateur à résistance négative à AO vu comme un système à rétroaction positive

Nous nous plaçons dans le cas où $R_1 = R_2$. En réaménageant le montage de la figure 35, nous obtenons les montages de la figure 38.

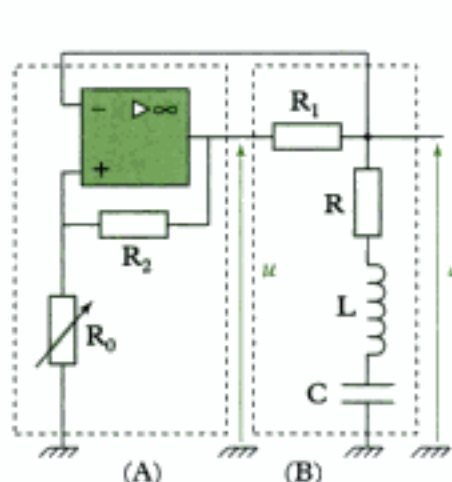
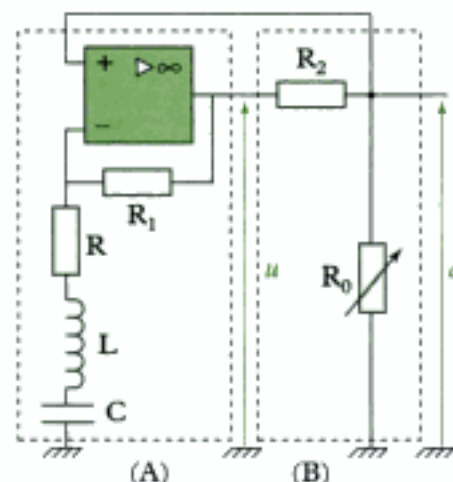


Fig. 38 - a) Oscillateur à résistance négative : vu comme un système rétroactionné.



b) Autre façon d'associer les chaînes directe et de retour ; elle conduit aux mêmes conclusions.

Dans le cas de la figure 38a, en utilisant un diviseur de la tension u , nous obtenons que :

– (A), la chaîne directe, est un amplificateur, avec :

$$A_V = \frac{u}{e} = 1 + \frac{R_2}{R_0};$$

Hidden page

Hidden page

Hidden page

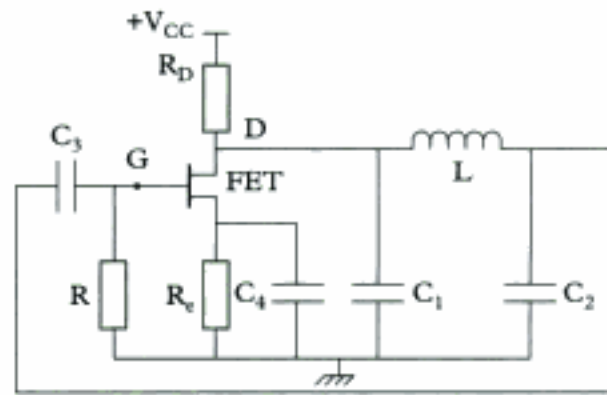


Fig. 47 - Oscillateur de type Colpitts à transistor à effet de champ.

Nous reconnaissons nettement un système rétroactionné avec le bouclage, la partie amplification (transistor et résistances R , R_D et R_S) et la partie filtrage (cellule en π avec une bobine L et deux condensateurs C_1 et C_2).

Reste le problème de l'amplificateur que l'on va évidemment modéliser en donnant des indications dans l'énoncé : par exemple, $R \gg Z_{C_3}$.

Ensuite, nous traduisons le fait que le transistor est un générateur de courant commandé par une tension en le modélisant par un opérateur de transconductance g tel que $i = g\epsilon$.

Enfin, conformément à l'un des schémas d'étude possible de ce genre de système, nous ouvrons la boucle, par exemple en G . La résistance R est alors transférée en parallèle sur le condensateur C_2 . Cependant, R ayant une valeur de l'ordre du $M\Omega$, elle est considérée comme infinie. Le modèle équivalent en boucle ouverte devient donc :

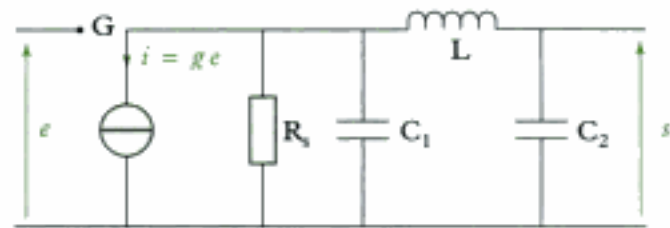


Fig. 48 - En boucle ouverte, modélisation du transistor par un générateur de courant commandé.

Or, le générateur de Norton avec sa résistance R_S en parallèle est équivalent à un générateur de Thévenin. Le circuit devient donc :

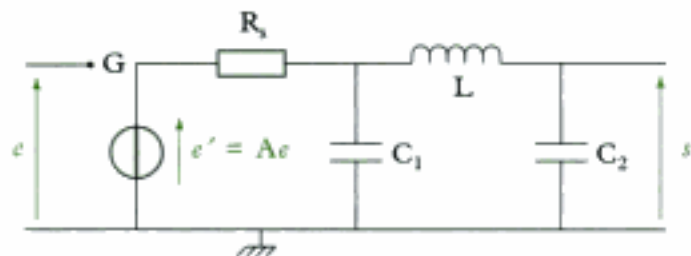


Fig. 49 - En boucle ouverte, modélisation du transistor par un générateur de tension commandé.

Cette fois, la modélisation est celle obtenue au paragraphe G.7 et la suite du calcul est identique, au filtre L , C_1 , C_2 près.

L'oscillateur Colpitts à transistor permet d'obtenir des oscillations haute fréquence (20 MHz) avec un très faible taux de distorsion harmonique (de l'ordre de 10^{-6}).

Hidden page

Solution

Comme $f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right)}}$, alors :

$$f_p = 27\,000\,950 \text{ Hz.}$$

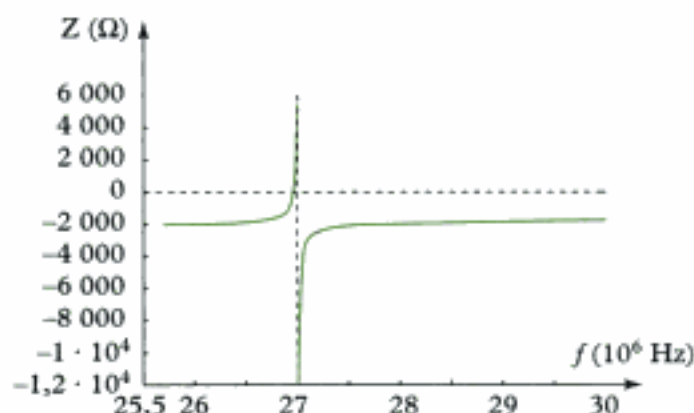
De même, $f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 26\,956\,061 \text{ Hz}$ et $E_r \approx 10^{-3}$.

Avec $Q = \frac{L\omega}{R}$, on a :

$$Q = 19\,173 \approx 20\,000.$$

Ce coefficient de qualité est très grand.

Nous traçons aussi $Z = \Re(Z)$. Nous remarquons que si $f < f_s$ et $f > f_p$, le dipôle est à composante capacitive. Entre f_s et f_p , domaine où il est généralement utilisé, le dipôle est inductif.



L. Conclusion

Nous pouvons dans un premier temps, comparer les oscillateurs à pont de Wien et à résistance négative que nous avons placés dans des situations d'écart identiques par rapport à la stabilité.

Les spectres des signaux montrent la présence d'harmoniques de rangs impairs : il y a symétrie par rapport à l'origine et les alternances sont symétriques.

Pour ce qui concerne les harmoniques des tensions d'entrée des filtres, leur amplitude décroît plus rapidement pour l'oscillateur à pont de Wien que pour l'oscillateur à résistance négative (figures 13a et 42). Ceci est dû aux ruptures de pente de ces signaux, plus marquées dans le cas de l'oscillateur à résistance négative (figures 12 et 40) car le point de fonctionnement de la « résistance négative » se trouve alors dans l'une des branches où sa résistance est positive (fig. 33). Cette différence concernant les amplitudes de ces signaux est largement compensée par la différence de sélectivité des deux filtres, visible en comparant les figures 13a, 13b, 42a, 42b. Le filtre de Wien est peu sélectif et $s(t)$, la tension de sortie du filtre, comprend les harmoniques de la tension d'entrée. Par contre, l'oscillateur à résistance négative filtre quasi uniquement le premier harmonique. Il en résulte que le signal délivré par l'oscillateur à résistance négative est plus proche d'une sinusoïde que ne l'est celui délivré par l'oscillateur à pont de Wien. Cependant, l'oscillateur à résistance négative est plus coûteux que l'oscillateur à pont de Wien, de par la présence de la bobine.

Ces deux montages ne permettent pas d'obtenir simplement une fréquence ajustable : il faut en effet agir sur les deux résistances (ou condensateurs) de l'oscillateur de Wien et modifier la capacité ou l'inductance dans l'oscillateur à résistance négative. Dans les deux cas, il faut ensuite relancer l'oscillateur.

Dans la pratique, les oscillateurs sinusoïdaux sont souvent obtenus à partir de signaux créneaux ou triangle qui subissent une « mise en forme » à l'aide de conformateurs à diodes (distorsion $\leq 1\%$).

Il est aussi possible d'utiliser le développement limité du sinus :

$$y = \sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

pour obtenir cette fonction à l'aide de multiplieurs et d'additionneurs.

Enfin, les oscillateurs revêtent une importance particulière dans notre société. Avec eux, nous fabriquons des horloges de tous genres, et quasiment tout système électronique un peu évolué en possède une. Cependant, comme nous le verrons au chapitre suivant, pour obtenir une horloge, nous n'avons pas besoin d'un oscillateur sinusoïdal ou quasi sinusoïdal. Par contre, dans de nombreux domaines, comme la Hi-Fi, chaque utilisateur souhaite pour son amplificateur le taux de distorsion de plus bas ($< 1\%$) ; le contrôle de ces matériels nécessite des oscillateurs quasi sinusoïdaux à très faible taux de distorsion ($< 0,05\%$). Un oscillateur à pont de Wien, pourtant très simple, avec une commande automatique de gain, permettant d'obtenir une distorsion de 10^{-5} , convient tout à fait.

L'essentiel

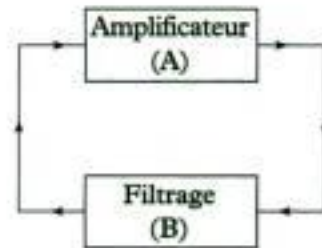
✓ Oscillateur quasi sinusoïdal

- Un **oscillateur** est un générateur qui délivre un signal périodique :
 - en l'absence de signal périodique extérieur à l'oscillateur ;
 - en étant alimenté par une source d'énergie continue.
- Un **oscillateur quasi sinusoïdal** génère un signal comprenant un harmonique principal et des harmoniques secondaires à faible effet sur le signal sinusoïdal. La forme du signal est alors proche d'une sinusoïde (dite quasi-sinusoïde).

✓ Éléments structurels et structure d'un oscillateur quasi sinusoïdal

- Un **oscillateur quasi sinusoïdal** nécessite :
 - une instabilité d'un système linéaire ;
 - un filtre pour ajuster la fréquence des oscillations ;
 - une amplification pour compenser l'atténuation du signal.
- Dans le but d'obtenir une instabilité, la structure d'un oscillateur quasi sinusoïdal est **une boucle** formée de la chaîne d'amplification et de la chaîne de filtrage.

Le caractère sinusoïdal approché (quasi sinusoïdal) des oscillations est dû à la saturation de la chaîne d'amplification.



✓ Condition d'oscillation en régime harmonique

Si \underline{A} et \underline{B} sont les fonctions de transfert associées aux chaînes (A) et (B), la condition d'oscillation en régime harmonique est :

$$\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1.$$

Elle est appelée **condition de Barkhausen** et contient une double condition :

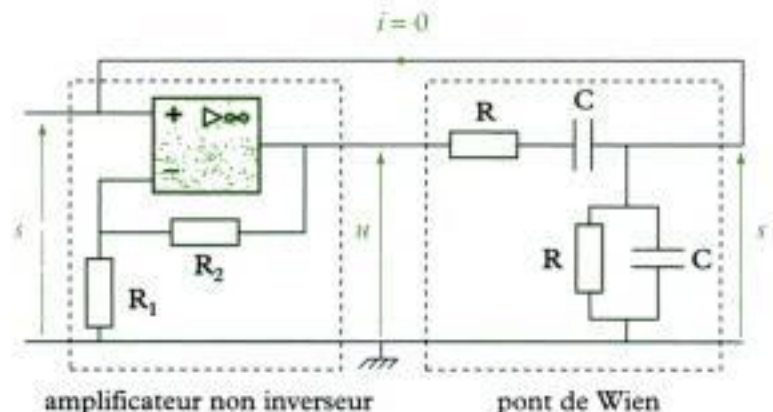
- sur les modules :

$$|\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| = 1 ;$$

- sur les arguments :

$$\arg[\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)] = \arg[\underline{A}(j\omega)] + \arg[\underline{B}(j\omega)] = 0 \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

✓ Oscillateur à réaction positive : cas de l'oscillateur à pont de Wien



• Cet oscillateur **vérifie les critères** retenus précédemment pour le système bouclé :

- système instable (réaction positive) ;
- boucle formée d'un amplificateur et d'un filtre ;
- ordre de la boucle égal à 2 ;
- signal d'entrée nul ;
- vérifiant pour une pulsation ω_0 donnée la condition de Barkhausen :

$$|\underline{A}(j\omega_0)\underline{B}(j\omega_0)| = 1, \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } f_0 = \frac{1}{2\pi RC};$$

- placé en limite de stabilité.

• Cependant, l'oscillateur à pont de Wien est un **médiocre oscillateur quasi sinusoïdal** puisque :

- sa bande passante est large ;
- la distorsion atteint vite des valeurs élevées ;
- il est limité aux fréquences de quelques kHz ;
- il est difficile à régler.

✓ Oscillateur à réseau déphaseur

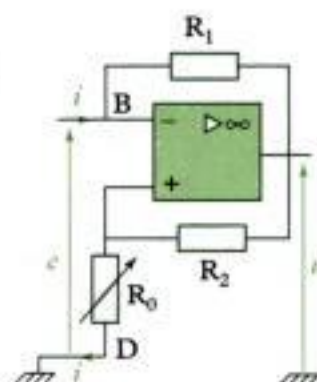
La condition de Barkhausen peut être réalisée d'une autre façon : la chaîne d'amplification (A) déphase de π et la chaîne (B) déphase de π par exemple. C'est le cas des réseaux déphaseurs.

✓ Oscillateur à résistance négative

Le dipôle ci-contre vu entre les points B et D, inséré dans un circuit, se comporte comme une résistance négative R_n .

Dans le cas considéré, nous avons : $e = -\frac{R_0 R_1}{R_2} i = R_n i$, et donc :

$$R_n = -\frac{R_0 R_1}{R_2}.$$



En insérant ce dipôle à résistance négative R_n dans un circuit RLC, on peut compenser la résistance R du circuit et obtenir des oscillations quasi sinusoïdales.

Un oscillateur à résistance négative peut aussi être vu comme un oscillateur à réaction positive.

✓ Oscillateurs haute fréquence

L'amplificateur opérationnel limite les montages dans lesquels il est engagé, notamment à cause de la fréquence. En haute fréquence, il est alors fait appel au transistor comme amplificateur linéaire de tension.

La présence d'un transistor dans un circuit se modélise sous une forme analogue à celle rencontrée pour les autres oscillateurs.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment trouver la condition pour qu'un système bouclé soit un oscillateur sinusoïdal (ou quasi sinusoïdal) ?

→ Savoir faire

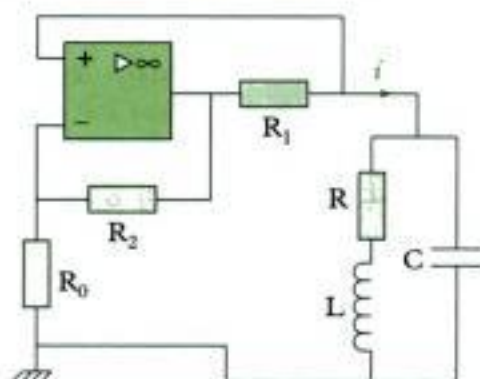
- 1 Repérer la boucle de réaction positive et la boucle de réaction négative.
- 2 Évaluer ou calculer l'impédance d'entrée du système sur la borne non inverseuse de l'amplificateur opérationnel.
- 3 Ouvrir la boucle de réaction positive.
- 4 Restituer l'indépendance des chaînes en plaçant en sortie de boucle l'impédance d'entrée précédemment calculée.
- 5 Établir pas à pas l'expression de la fonction de transfert de la boucle ainsi ouverte.
- 6 Donner de cette fonction de transfert une forme normalisée (paramètres m , ω_0 ou Q , ω_0).
- 7 En déduire l'équation différentielle pour la tension de sortie s en utilisant le fait que $s = e$ lors du fonctionnement de l'oscillateur.
- 8 Considérer que les oscillations sont sinusoïdales et donner la condition pour que l'équation différentielle se mette sous la forme :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

- 9 Donner la pulsation ω_0 et/ou la fréquence d'oscillations f_0 .
- 10 Discuter le caractère non sinusoïdal des oscillations réelles.

→ Application

Soit le système bouclé suivant. Quelles conditions doivent vérifier les paramètres du système pour que les oscillations soient sinusoïdales ? Quelle sera alors leur fréquence ?



Solution

- 1 Il y a une boucle de réaction sur l'entrée inverseuse et une boucle de réaction sur l'entrée non-inverseuse.
- 2 L'impédance d'entrée sur la borne non inverseuse est infinie puisque l'amplificateur opérationnel est parfait : $i^+ = 0$.

③ On ouvre la boucle de réaction positive comme indiqué dans le schéma ci-contre.

④ Il faudrait ajouter une impédance infinie en sortie, donc un fil coupé.

Nous n'avons donc rien à ajouter pour rétablir l'indépendance des chaînes.

⑤ On obtient alors :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} \frac{\underline{s}}{\underline{u}}$$

Or, $\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = 1 + \frac{R_2}{R_0}$ puisqu'on a un amplificateur non inverseur,

$$\text{et } \frac{\underline{s}}{\underline{u}} = \underline{B}(j\omega) = \frac{\frac{(jL\omega + R) \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}}{R_1 + \frac{(L\omega + R) \frac{1}{C\omega}}{L\omega + R + \frac{1}{C\omega}}} = \frac{jL\omega + R}{jL\omega + R + R_1 + jR_1RC\omega - R_1LC\omega^2}$$

Nous avons donc :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) \left(\frac{jL\omega + R}{jL\omega + R + R_1 + jR_1RC\omega - R_1LC\omega^2} \right) \\ = H_0 \left(\frac{jL\omega + R}{jL\omega + R + R_1 + jR_1RC\omega - R_1LC\omega^2} \right), \text{ avec } H_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right).$$

⑥ Par une étude aux limites en basse fréquence et en haute fréquence, nous voyons que nous n'obtiendrons pas une forme normalisée connue.

⑦ Lorsque le bouclage existe, on a $\underline{e} = \underline{s}$. La réécriture de la fonction de transfert conduit à l'équation différentielle :

$$L \frac{ds}{dt} + (R + R_1)s + R_1RC \frac{ds}{dt} + R_1LC \frac{d^2s}{dt^2} = H_0L \frac{ds}{dt} + H_0Rs,$$

soit en ordonnant :

$$R_1LC \frac{d^2s}{dt^2} + (L + R_1RC - H_0L) \frac{ds}{dt} + (R + R_1 - H_0R)s = 0$$

⑧ Les oscillations seront sinusoïdales si l'équation différentielle peut s'écrire :

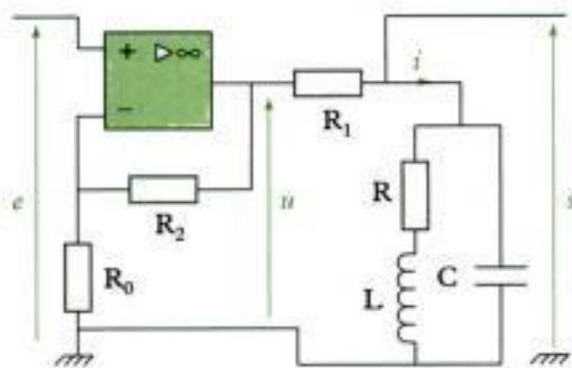
$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

Pour cela il faut que le coefficient de $\frac{ds}{dt}$ soit nul, c'est-à-dire :

$$L + R_1RC - H_0L = 0.$$

Il vient $L = \frac{R_1RC}{H_0 - 1}$, soit encore :

$$\frac{L}{RC} = \frac{R_0R_1}{R_2}$$



⑨ L'équation différentielle s'écrit alors : $\frac{d^2s}{dt^2} + \left(\frac{R + R_1 - H_0 R}{R_1 LC} \right) s = 0$, ce qui donne :

$$\omega_0^2 = \frac{R + R_1 - H_0 R}{R_1 LC} = \frac{R + R_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) R}{R_1 LC} = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_2 R}{R_1 R_0}\right),$$

soit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_2 R}{R_1 R_0}\right)}$$

⑩ Nous nous souvenons que le coefficient d'amortissement $L + R_1 RC - H_0 L$ doit être négatif pour qu'il y ait accrochage des oscillations : la solution $s(t)$ est alors divergente et va croître jusqu'à ce que u atteigne la valeur $\pm V_{\text{sat}}$; l'amplificateur opérationnel fonctionne alors en saturation.

Nous retrouvons un comportement proche de celui d'un oscillateur de relaxation si $L + R_1 RC - H_0 L > 0$, et proche de celui d'un oscillateur sinusoïdal si $L + R_1 RC - H_0 L$ est légèrement positif.

De plus, ω_0 peut aussi se mettre sous la forme :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{R^2 C}{L}\right)}}{\sqrt{LC}},$$

ce qui montre que ω_0 ne dépend que du circuit résonant. Si $\frac{R^2 C}{L} > 1 \Leftrightarrow R > \sqrt{\frac{L}{C}}$, il n'y a pas d'oscillations.

Méthode n° 2

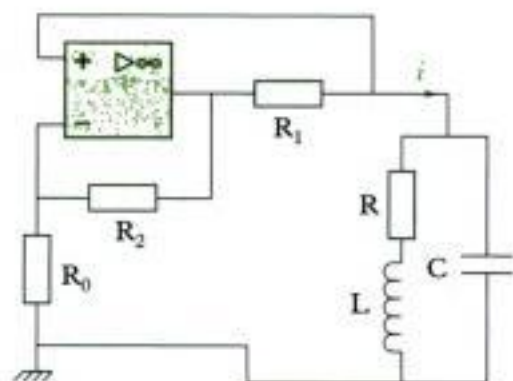
Comment obtenir les conditions et la fréquence d'oscillation d'un oscillateur quasi sinusoïdal en utilisant le produit de boucle ?

→ Savoir faire

- ① Dans la boucle fermée, reconnaître les blocs fonctionnels, ou opérateurs, qui constituent le circuit pouvant se comporter comme un oscillateur pseudo-sinusoïdal.
- ② Établir la fonction de transfert de chacun de ces blocs.
- ③ Former le produit de boucle.
- ④ Appliquer la condition de Barkhausen pour obtenir la condition et la fréquence d'oscillation.

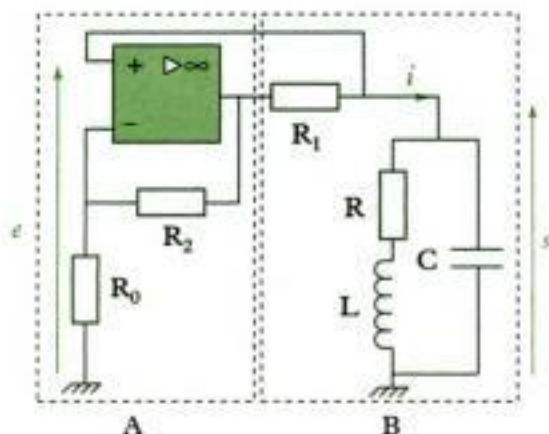
→ Application

Donner la condition et la fréquence d'oscillation du circuit représenté sur la figure ci-contre :



Solution

- ① Nous reconnaissons sur la figure un bloc (A) amplificateur non inverseur et un bloc (B) constituant un filtre du deuxième ordre très probablement passe-bande, ce qui répond à la structure classique d'un oscillateur quasi sinusoïdal (cf. cours).



- ② La fonction de transfert du bloc (A) est :

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_0}$$

Le bloc (B) a pour fonction de transfert, en appliquant la relation du diviseur de tension :

$$\underline{B}(j\omega) = \frac{\frac{(jL\omega + R)}{jC\omega}}{R_1 + \frac{(jL\omega + R)}{jC\omega}} = \frac{jL\omega + R}{jL\omega + R + R_1 + jR_1RC\omega + R_1LC(j\omega)^2}$$

- ③ Le produit de boucle P est donc :

$$\underline{P}(j\omega) = \left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right) \frac{jL\omega + R}{jL\omega + R + R_1 + jR_1RC\omega + R_1LC(j\omega)^2}$$

- ④ La condition de Barkhausen $\underline{P}(j\omega) = 1$ donne immédiatement :

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_0}\right)(jL\omega + R) = jL\omega + R + R_1 + jR_1RC\omega + R_1LC(j\omega)^2$$

qui conduit par identification à :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R_2 R_1}{R_0 R_1}\right)} \quad \text{et} \quad L = \frac{R_1 R_0 RC}{R_2}$$

Nous obtenons ainsi la condition d'oscillation pseudo-sinusoïdale et la pulsation d'oscillation qui donne la fréquence d'oscillation ($\omega = 2\pi f$).

Si $R_1 = R_2$, alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R}{R_0}\right)} \quad \text{et} \quad L = R_0 RC.$$

Méthode n° 3

Comment obtenir les conditions et la fréquence d'oscillation d'un oscillateur quasi sinusoïdal en utilisant directement l'équation différentielle régissant le système ?

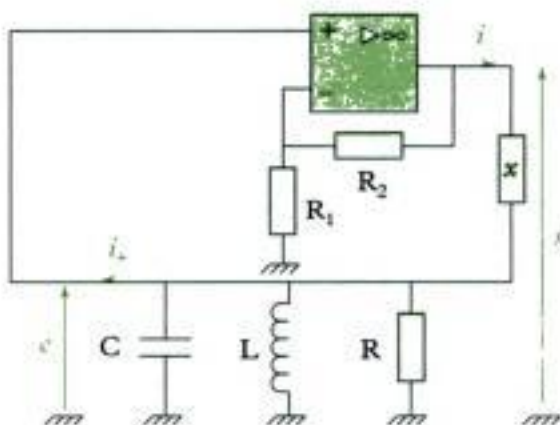
On cherche la ou les conditions d'oscillations quasi sinusoïdales et la fréquence de ces oscillations.

→ Savoir faire

- ❶ Établir l'équation différentielle d'une grandeur tension du système en utilisant les équations de Kirchhoff.
- ❷ Ensuite, enchaîner les étapes ❸, ❹ et ❺ de la méthode n° 1. Considérer que les oscillations sont sinusoïdales et donner la condition pour que l'équation différentielle se mette sous la forme $\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$.
- ❸ Donner la pulsation ω_0 et/ou la fréquence d'oscillations f_0 .
- ❹ Discuter le caractère non sinusoïdal des oscillations réelles.

→ Application

Quelle valeur faut-il donner à la résistance x pour obtenir des oscillations ? Quelles seront leur fréquence ?



Solution

- ❶ En utilisant les lois de Kirchhoff, nous obtenons :

- $i = \frac{s - e}{x}$ dans la résistance x ,

- puis $i = \frac{1}{R} e + C \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} \int e dt$ par la loi des nœuds.

En égalant les deux expressions, il vient :

$$\frac{s - e}{x} = \frac{1}{R} e + C \frac{de}{dt} + \frac{1}{L} \int e dt.$$

Or, en fonctionnement nous avons aussi :

$$s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) e, \text{ soit : } e = Ks \text{ en posant } K = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Hidden page

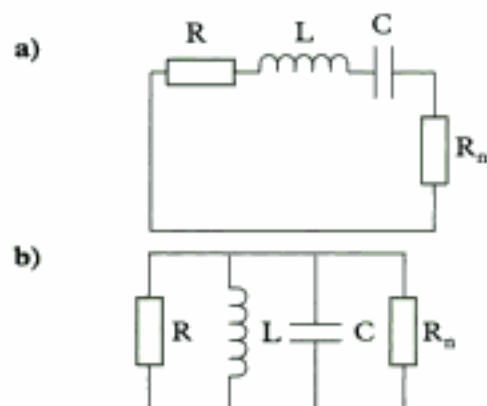
Exercices

Niveau 1

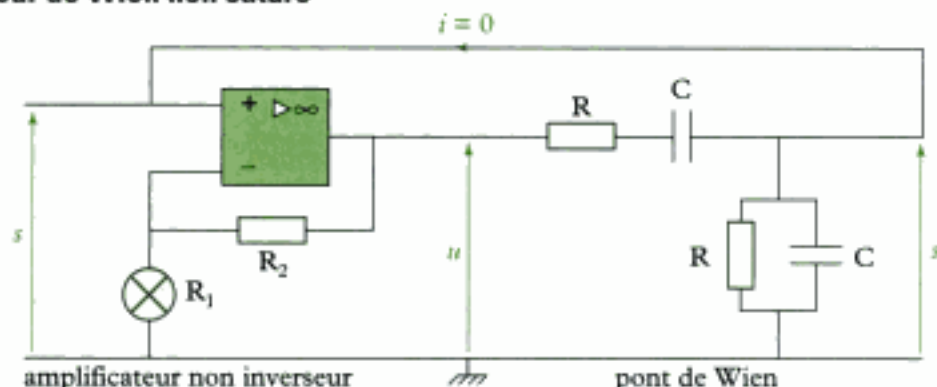
Ex. 1 Association d'une résistance négative avec une structure RLC série ou parallèle

Dans le mode de fonctionnement des deux associations suivantes, R_n matérialise toujours un dipôle à résistance dynamique négative ajustable.

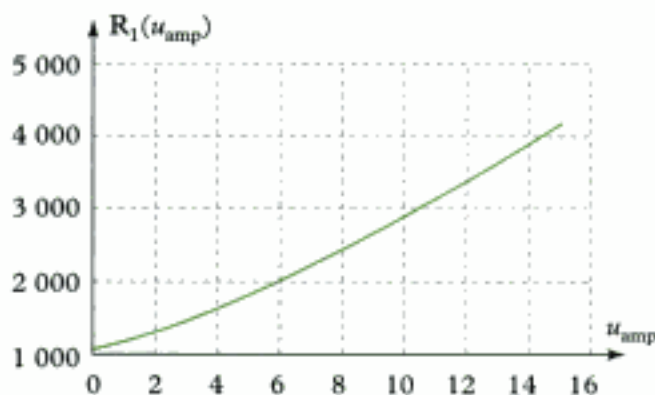
À quelle condition un signal sinusoïdal prend-il naissance dans chacun de ces circuits ?



Ex. 3 Oscillateur de Wien non saturé

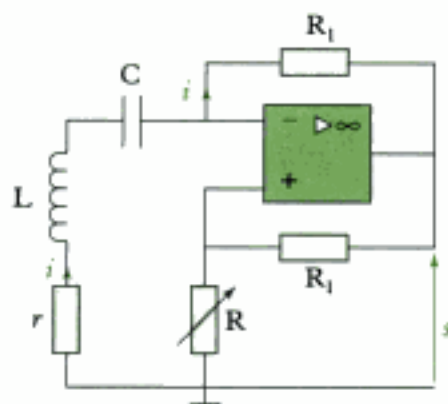


Dans le montage de l'oscillateur de Wien vu en cours, on introduit une ampoule de veilleuse (6 W, 220 V) dont la résistance R_1 varie en fonction de la tension aux bornes de l'ampoule u_{amp} selon la caractéristique suivante :



Niveau 2

Ex. 2 Oscillateur RLC



- 1) Exprimer s en fonction de R , R_1 et i .
- 2) Établir l'équation différentielle vérifiée par i .
- 3) Montrer qu'à partir d'une valeur R_0 de R , on observe des oscillations.
- 4) Connaissant la pulsation ω_0 de ces oscillations, R et C , déterminer L et r .

Oral Polytechnique, 2003, option PC

Cette ampoule est donc un dipôle non linéaire dont la résistance admet une description analytique approchée du type :

$$R_1 = R_0 \left[1 + \left(\frac{u_{amp}}{u_0} \right)^P \right],$$

où R_0 , u_0 et P sont des constantes propres à l'ampoule. Données : $R_0 = 1\,100\,\Omega$; $u_0 = 6,8\,\text{V}$; $P = 1,3$.

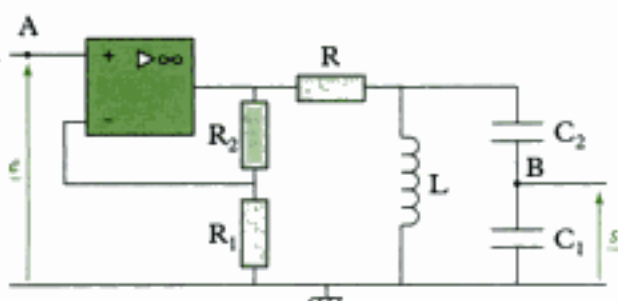
- 1) Donner la nouvelle expression de l'amplification :

$$A_v(s) = \frac{u}{s}$$

- 2) Rappeler l'expression de l'amplification $B = \frac{s_F}{u_F}$ du filtre de Wien à sa fréquence de résonance.

- 3) Lors du fonctionnement de l'oscillateur, la tension u est la même en sortie de l'amplificateur et à l'entrée du filtre.

Hidden page



- 3) On relie B à A par un fil. En régime linéaire, quelle est l'équation différentielle vérifiée par s ?
- 4) À quelle condition peut-on observer des oscillations ? Qu'observera-t-on alors ?

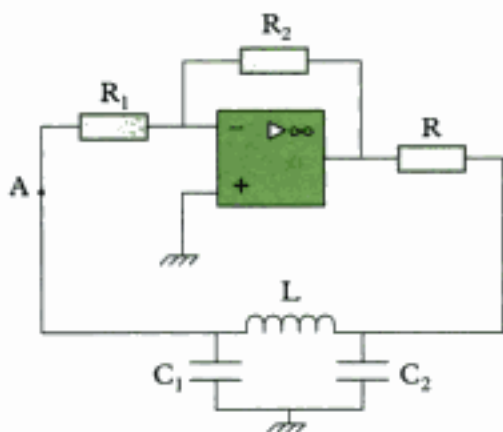
Oral, Mines-Pont

Ex. 8 Utilisation de la condition de Barkhausen

- 1) Dans l'exercice précédent, exprimer la condition d'oscillation en utilisant la condition de Barkhausen.
- 2) La fréquence d'oscillation est 1 000 Hz si :
 $L = 5 \text{ mH}$, $C_1 = 100 \text{ nF}$ et $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$.
 En déduire R_1 et C_2 .
- 3) Dans la pratique, comment doit-on choisir R_1 et C_2 ?

Ex. 9 Oscillateur Colpitts

Soit l'oscillateur de type Colpitts dont le schéma est donné ci-dessous :



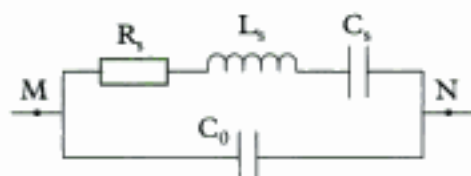
- 1) Ouvrir la boucle de réaction et donner la résistance d'entrée de l'amplificateur.
- 2) Donner le schéma équivalent du circuit en boucle ouverte.
- 3) Exprimer alors la fonction de transfert en boucle ouverte.
- 4) En déduire la pulsation d'oscillations et les conditions sur les composants du montage.

Ex. 10 Générateur d'ultrasons : oscillateur

Pour générer des ultrasons, on utilise une plaquette de matériau piézoélectrique dont deux faces opposées

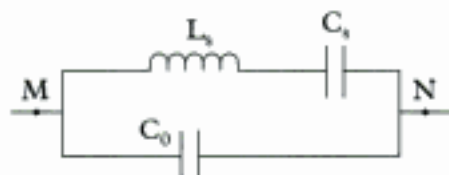
sont métallisées. On applique une tension périodique électrique, de fréquence f , entre les surfaces métallisées. Pour une certaine valeur de la fréquence f_0 , la plaquette rentre en résonance mécanique. Les vibrations de la plaquette (de même fréquence f_0) sont ensuite communiquées au fluide qui l'entoure et génèrent des ondes ultrasonores.

On se propose d'étudier d'abord le comportement électrique de la plaquette piézoélectrique, assimilable au dipôle MN de la figure ci-dessous, puis de s'intéresser à la façon dont on peut réaliser, à l'aide de la plaquette, un oscillateur dans le domaine des fréquences ultrasonores.



- 1) On néglige d'abord les phénomènes dissipatifs (dissipation de puissance) représentés par la résistance R_s .

Le schéma électrique équivalent de la plaquette piézoélectrique est alors celui-ci.



- a) L'impédance Z_p de la plaquette est de la forme $Z_p = jX$. Montrer que X peut s'écrire :

$$X = - \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}{C\omega \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)}$$

On précisera les valeurs des pulsations ω_s et ω_p et du coefficient C .

- b) Pour la plaquette utilisée, les éléments du schéma électrique équivalent sont les suivants :

$$L_s = 1\,000 \text{ H} ; C_s = 0,4 \text{ pF} ; C_0 = 60 \text{ pF}.$$

Donner les valeurs des pulsations ω_s et ω_p et de l'écart relatif :

$$\frac{(\omega_s - \omega_p)}{\omega_s}$$

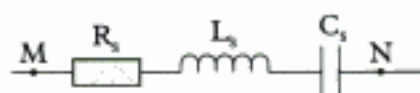
- c) Quels phénomènes physiques empêchent l'impédance de prendre des valeurs nulle ou infinie ?

- 2) On prend en compte maintenant les phénomènes dissipatifs : on considère le montage initial avec $R_s = 10 \Omega$.

Montrer que, compte-tenu des valeurs numériques, le schéma électrique équivalent se réduit, pour des fréquences voisines de :

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}}$$

au schéma simple ci-après (circuit $R_s L_s C_s$ série).



3) On souhaite réaliser un oscillateur délivrant une tension sinusoïdale de fréquence f_s . Le montage de principe est celui de la figure 1. Z_s est l'impédance du circuit $R_s L_s C_s$ série. Le « convertisseur » est un convertisseur courant-tension idéal (impédances d'entrée et de sortie nulles, fonction de transfert $\underline{A} = \frac{V_s}{I_c} = A$ réelle).

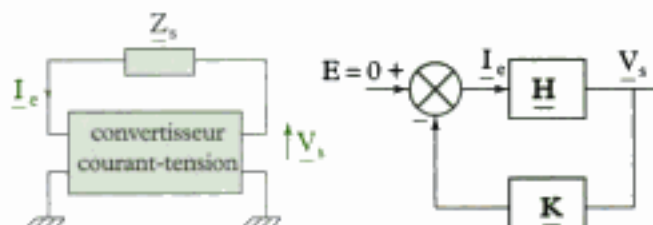


figure 1

figure 2

a) Le montage de la figure 1 peut être représenté par le système bouclé de la figure 2 pour lequel l'entrée E est nulle. Donner les expressions des fonctions de transfert \underline{H} et \underline{K} .

b) Quelle relation doivent vérifier \underline{H} et \underline{K} pour que le système bouclé fonctionne en oscillateur (i_c et v_s sinusoïdales) ?

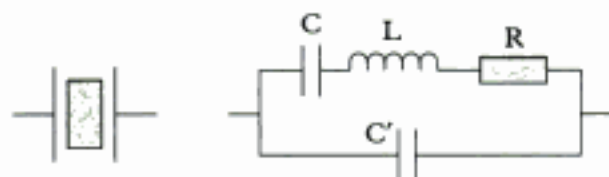
c) Quelle relation existe alors entre A et Z_s ? Déterminer la valeur correspondante A_0 de A , ainsi que la fréquence d'oscillation.

d) Que se passe-t-il si $|A| > A_0$?

Écrit, CCP, 2003, PSI

Ex. 11 Oscillateur à quartz

Un quartz piézo-électrique peut être représenté par le schéma électrique suivant :



représentation

symbolique du quartz

schéma équivalent

1) a) Calculer l'impédance complexe Z du quartz en fonction de C , C' , L , ω (pulsation du régime sinusoïdal forcé) dans le cas où R est nulle.

b) Tracer le graphe de l'impédance $Z = |Z|$ du quartz en fonction de ω quand R est nulle. On introduira deux pulsations caractéristiques du quartz ω_s et ω_p ($\omega_s < \omega_p$) que l'on explicitera.

c) Comment serait modifié le graphe précédent si R était non nulle mais de faible valeur ? (On se contentera d'une réponse qualitative.)

Donner alors les valeurs de Z pour les pulsations ω_s et ω_p en fonction de R , C , C' et L .

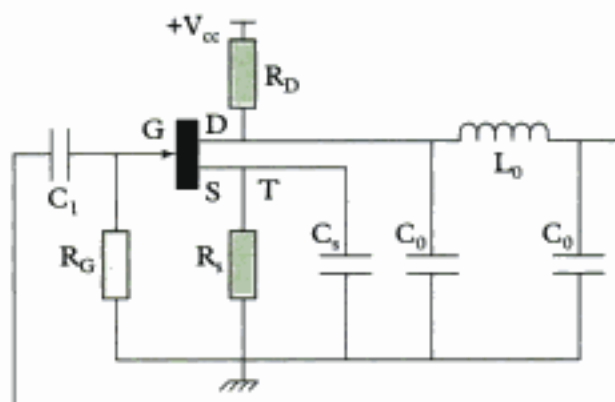
d) Dans quel domaine de pulsation le quartz peut-il être assimilé à une inductance ? à une capacité ? Préciser alors leur valeur en fonction de ω .

e) Application numérique :

$$L = 2 \text{ mH}, \quad C = 10^{-2} \text{ pF}, \quad C' = 10 \text{ pF}.$$

Calculer les fréquences caractéristiques du quartz.

2) Oscillateur Colpitts



(Les condensateurs C_1 et C_3 peuvent être considérés comme des court-circuits.)

T est un transistor de transconductance s à effet de champ, et peut être assimilé en alternatif à la source de courant commandée par une tension V_{gs} du schéma équivalent et délivrant ainsi une intensité sV_{gs} .

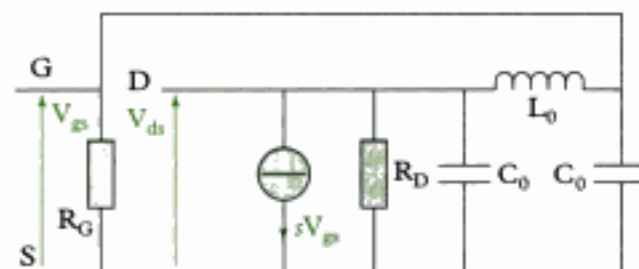


schéma alternatif équivalent

a) Donner deux relations entre V_{gs} et V_{ds} . En déduire que sous certaines conditions sur les paramètres R_D , R_G , C_0 , L_0 , s et la pulsation ω du régime sinusoïdal du circuit, la différence de potentiel V_{gs} peut prendre des valeurs non nulles en l'absence de tout générateur alternatif extérieur.

b) On admet que dans ce cas, le montage joue le rôle d'un oscillateur à la pulsation déterminée en 2) a). Donner la fréquence d'oscillation en fonction de L_0 , C_0 et la relation entre s et R_D permettant l'oscillation du circuit, dans le cas où R_G est infinie.

c) On remplace l'inductance par le quartz dont les caractéristiques sont celles de la question 1) e). On obtient alors un oscillateur Pierce.

i) Dans quel domaine de pulsations, le montage peut-il osciller ?

ii) Quel intérêt présente donc ce montage par rapport à celui à inductance ?

iii) Calculer la fréquence d'oscillations du montage pour R_D infinie et $C_0 = 30 \text{ pF}$.

Écrit, Centrale-Supélec, 1989

Indications

Ex. 2

Utiliser de préférence les diviseurs de tension et la loi des mailles.

Ex. 5

On peut avoir, bien sûr :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2,$$

cas le plus fréquent, mais aussi :

$$\underline{H} = \underline{H}_3 + \underline{H}_4.$$

Ex. 6

Pour un filtre en cascade, comme ici, reprendre les méthodes vues en première année et revoir le chapitre 4 sur le filtrage.

Ex. 7

Décomposer la fonction $\underline{H} = \frac{s}{e}$ en produit de plusieurs quotients.

Solutions des exercices

Exercice de niveau 1

Exercice 1

• Cas RLC série (cf. méthode n° 3)

Par application de la loi des mailles, on obtient :

$$u_n + u_C + u_L + u_R = 0, \text{ soit : } R_n i + u_C + L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Avec $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$, on obtient :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_n + R)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Si $R_n + R = 0$, alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0, \text{ de solutions sinusoïdales de pulsation } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

On aura alors : $u_C(t) = U_{Cm} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (U_{Cm} et φ se déterminent à l'aide des conditions initiales.)

Il faut ajuster R_n à la valeur $-R$.

• Cas RLC parallèle

Par application de la loi des nœuds, on obtient :

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Avec $i = \frac{u}{R_n}$, $i_R = \frac{-u}{R}$, $i_C = -C \frac{du}{dt}$ et $u = -L \frac{di_L}{dt}$,

on obtient :

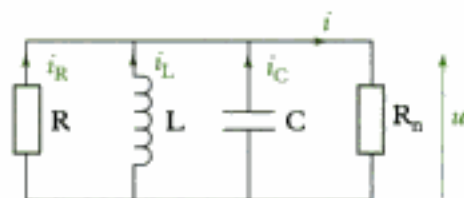
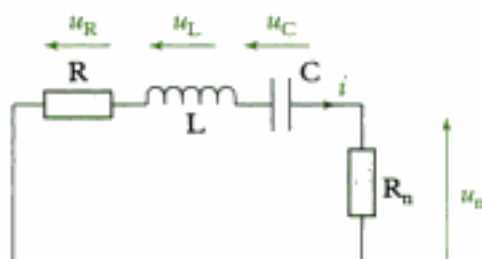
$$\frac{u}{R_n} + \frac{u}{R} - i_L + C \frac{du}{dt} = 0, \text{ soit encore : } -LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} - L \left(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R} \right) \frac{di_L}{dt} - i_L = 0.$$

Si $R_n = -R$, alors l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} i_L = 0, \text{ de solutions sinusoïdales de pulsation } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

On aura donc : $i_L = I_{Lm} \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Il faut ajuster R_n à la valeur $-R$.



Exercices de niveau 2

Exercice 2

1) Nous reconnaissons un montage à résistance négative associé à un circuit RLC série. En régime linéaire, nous pouvons écrire (cf. méthode n° 3) :

$$e - s = R_1 i \quad (1)$$

Par un diviseur de tension, on obtient e en utilisant la propriété $e_+ = e_-$:

$$e = s \frac{R}{R + R_1} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) combinées donnent :

$$e - e\left(\frac{R+R_1}{R}\right) = R_1 i, \text{ soit } e\left(1 - \frac{R+R_1}{R}\right) = R_1 i.$$

Donc : $-e\frac{R_1}{R} = R_1 i$ et $e = -Ri$ (3)

Les équations (2) et (3) permettent d'écrire :

$$-Ri = s\frac{R}{R+R_1}, \text{ soit : } s = -(R+R_1)i$$

2) On peut donc remplacer la tension e par $-Ri$ et le montage RLC série devient le montage ci-contre.

À partir de la loi des mailles, $u_C + u_L + u_r + u_{-R} = 0$, on obtient :

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + ri - Ri = 0 \quad (4)$$

Or $q = \int i dt$, donc en dérivant (4), on obtient :

$$\frac{i}{C} + L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} - R\frac{di}{dt} = 0$$

qui peut s'écrire :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + (r-R)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

3) Si $r-R = 0$, soit $R = r = R_0$, l'équation devient :

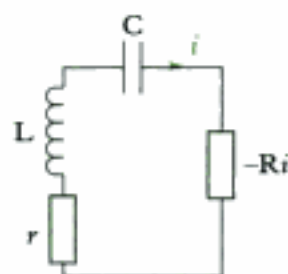
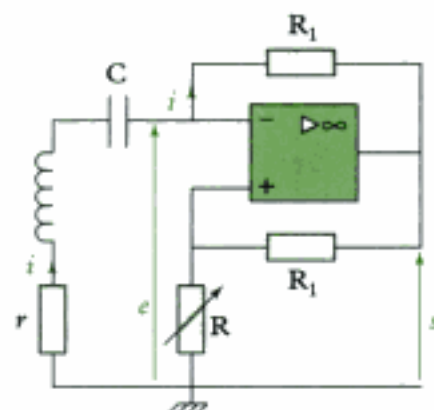
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0,$$

dont on connaît la solution sinusoïdale :

$$i = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

4) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ équivaut à :

$$L = \frac{1}{C\omega_0^2} \text{ et } r = R = R_0$$



Exercice 3

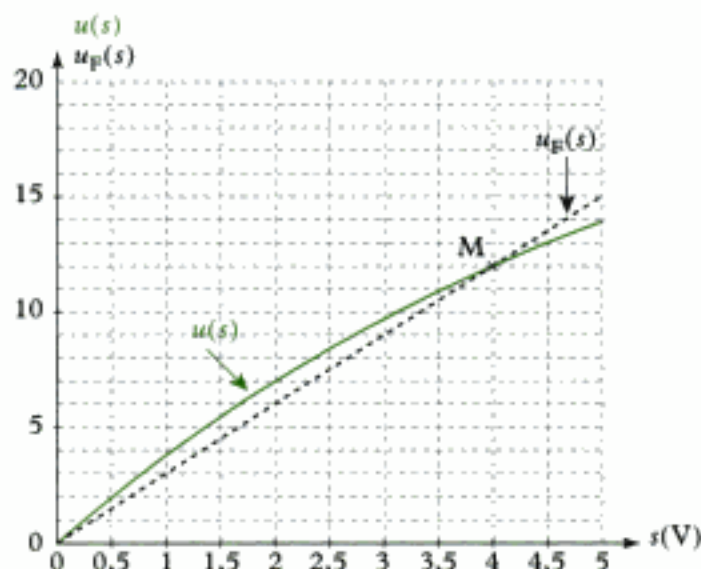
1) Pour l'amplificateur non inverseur, on a :

$$A_v(s) = \frac{u}{s} = 1 + \frac{R_2}{R_1}, \text{ soit : } A_v = 1 + \frac{R_2}{R_0 \left[1 + \left(\frac{u_{amp}}{u_0} \right)^p \right]}$$

2) On a toujours (cf. cours) :

$$B = \frac{1}{3}$$

3) On obtient :



Les deux courbes se coupent au point M qui est le point de fonctionnement du circuit. On lit :

$$u = 12 \text{ V et } s = 4 \text{ V.}$$

On a bien entendu : $s = \frac{u}{3}$.

4) Dans un tel montage, la tension de sortie de l'amplificateur ne peut plus atteindre la saturation. L'amplificateur opérationnel fonctionne toujours en mode linéaire. De plus, la tension de sortie est ajustée par l'intermédiaire du rapport $\frac{R_2}{R_0}$, variable grâce à R_2 .

Exercice 4

1) Nous avons une structure classique d'opérateurs en boucle fermée, l'un constitué par \mathcal{A} qui réalise l'opération : $e \rightarrow A_v e$, et l'autre constitué par un filtre que l'on identifie comme un quadripôle de Wien bien connu, qui diffère de ceux rencontrés habituellement par le fait que $R_1 \neq R_2$ et $C_1 \neq C_2$ ce qui est conforme à une situation réelle de travail pratique. Il est en effet difficile de trouver deux résistances égales ou deux condensateurs de capacités égales. Le fabricant livre ces composants avec une marge d'incertitude.

Nous savons aussi que des oscillations sinusoïdales, pour un opérateur à une seule rétroaction, sont générées lorsque la rétroaction est positive. L'opérateur \mathcal{A} pourrait donc s'identifier à un amplificateur opérationnel de type non inverseur. Le circuit proposé est alors un oscillateur de Wien classique.

La grandeur électrique mettant en évidence les oscillations n'étant pas précisée, nous choisissons la grandeur tension $e(t)$ (on aurait pu choisir la grandeur courant $i(t)$) et nous cherchons à montrer que sous conditions, elle peut être oscillante harmonique (cf. méthode n° 3).

Établissons l'équation différentielle dont dépend $e(t)$:

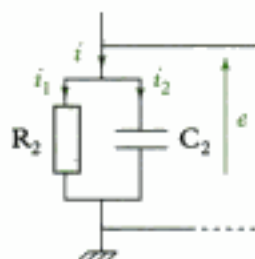
$$i = i_1 + i_2, \text{ avec } i_1 = \frac{e}{R_2} \text{ et } i_2 = C_2 \frac{de}{dt},$$

$$\text{donc : } i = \frac{e}{R_2} + C_2 \frac{de}{dt} \quad (1)$$

De plus :

$$s - e = u_{C_1} + R_1 i \quad (2),$$

$$\text{avec } i = C_1 \frac{du_{C_1}}{dt} \text{ et } s = A_v e.$$



En dérivant (2), il vient :

$$A_v \frac{de}{dt} - \frac{de}{dt} = \frac{du_{C_1}}{dt} + R_1 \frac{di}{dt}, \text{ ou encore : } A_v \frac{de}{dt} - \frac{de}{dt} = \frac{i}{C_1} + R_1 \frac{di}{dt} \quad (3)$$

En remplaçant dans (3) l'expression de i donnée à la relation (1), on obtient :

$$A_v \frac{de}{dt} - \frac{de}{dt} = \frac{e}{R_2 C_1} + \frac{C_2}{C_1} \frac{de}{dt} + \frac{R_1}{R_2} \frac{de}{dt} + C_2 R_1 \frac{d^2 e}{dt^2},$$

et enfin :

$$R_1 C_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + \left(1 - A_v + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{de}{dt} + \frac{e}{R_2 C_1} = 0 \quad (4)$$

Cette équation admet des solutions sinusoïdales si elle est de la forme :

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \omega_0^2 e = 0, \text{ soit pour : } A_v = 1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2}$$

2) Dans ce cas, (4) devient :

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{e}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0,$$

donc la pulsation des oscillations est :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Cependant, il faut encore que les oscillations puissent démarrer. L'équation différentielle :

$$\frac{d^2 e}{dt^2} + \frac{1 - A_v + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2}}{2 R_1 C_2} \frac{de}{dt} + \frac{e}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0, \text{ qui s'écrit : } \frac{d^2 e}{dt^2} + 2k \frac{de}{dt} + \omega_0^2 e = 0,$$

a pour équation caractéristique $r^2 + 2kr + \omega_0^2 = 0$ de discriminant :

$$\Delta' = k^2 - \omega_0^2 \approx -\omega_0^2 \quad (5)$$

pour que les oscillations soient quasi sinusoïdales.

La solution $e(t) = e^{-kt}(A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$ est légèrement divergente si k est petit et négatif (k petit devant ω_0 , ce qui justifie la relation (5)). Les oscillations naissent par divergence et sont limitées par les non linéarités du système si :

$$\frac{1 - A_v + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2}}{2 R_1 C_2} \text{ est petit et négatif}$$

Remarque : si $C_1 = C_2$ et $R_1 = R_2$, la condition $1 - A_v + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_1}{R_2} = 0$ devient :

$$1 - A_v + 1 + 1 = 0, \text{ soit : } A_v = 3.$$

De même : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}$ et $\frac{3 - A_v}{2RC} < 0 \Rightarrow A_v > 3$ (relations vues en cours).

Exercice 5

1) L'amplificateur opérationnel étant parfait, $u = e$.

Le rapport $\frac{s}{e}$ s'exprime par :

$$\frac{s}{e} = \frac{\left(R + jL\omega + r + \frac{1}{jC\omega}\right) i}{\left(jL\omega + r + \frac{1}{jC\omega}\right) i}$$

Ainsi :

$$\underline{H} = 1 + \frac{jRC\omega}{1 + j r C \omega - LC\omega^2}, \text{ soit : } \underline{H} = 1 + \frac{jRC\omega}{1 + j r C \omega + (jLC\omega)^2}$$

On reconnaît en \underline{H} la somme d'un suiveur et d'un filtre passe-bande.

2) On doit avoir $AH(j\omega_0) = 1$, avec A réel. $\underline{H}(j\omega_0)$ doit donc être un réel et, en conséquence,

$\frac{jRC\omega_0}{1 + j r C \omega_0 + (jLC\omega_0)^2}$ doit l'être aussi, ce qui implique :

$$1 + (jLC\omega_0)^2 = 0.$$

La fréquence d'oscillation est donc :

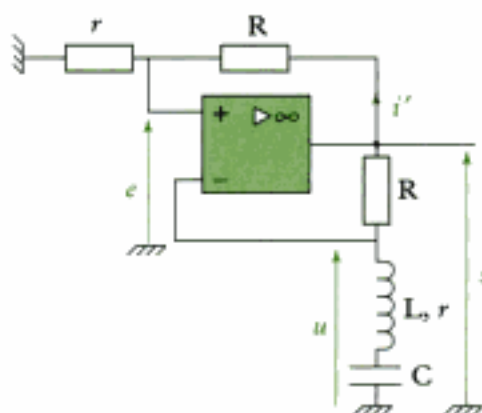
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \text{ soit : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Or, $\underline{H}(j\omega_0) = 1 + \frac{RC\omega_0}{rC\omega_0} = 1 + \frac{R}{r}$, donc :

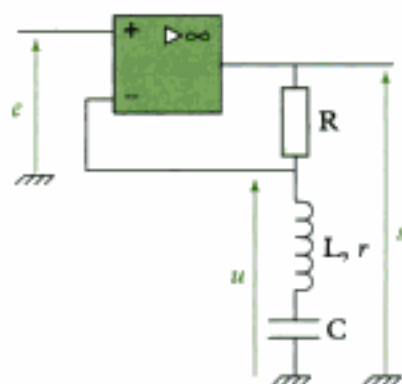
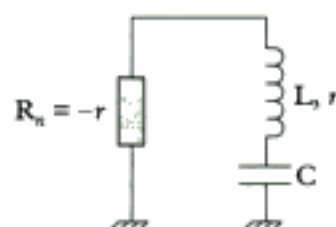
$$A = \frac{1}{1 + \frac{R}{r}} = \frac{r}{R+r} < 1$$

3) Vu la forme de l'amplification $A = \frac{r}{R+r}$, on peut utiliser un simple **diviseur de tension** avec :

$$\frac{e}{s} = \frac{r i'}{(R+r) i'} = \frac{r}{r+R}.$$



4) On reconnaît le montage classique à résistance négative. Finalement, le montage se réduit à celui ci-contre : ne restent dans ce circuit que le **condensateur C** et l'**inductance L**. Les oscillations pseudo-périodiques en présence de L, r, C deviennent sinusoïdales s'il ne reste que L et C , de pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

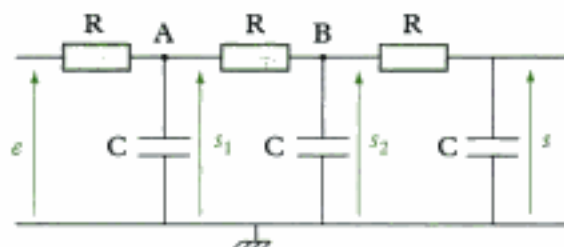


Exercice 6

1) En appliquant le théorème de Millman aux nœuds B et A, on obtient, avec $p = j\omega$ (cf. méthode n° 2) :

$$s_2 = \frac{\frac{s}{R} + \frac{s_1}{R}}{\frac{2}{R} + Cp} \Leftrightarrow s_2 = \frac{s + s_1}{2 + RCp} \quad (1)$$

$$s_1 = \frac{\frac{e}{R} + \frac{s_2}{R}}{\frac{2}{R} + Cp} \Leftrightarrow s_1 = \frac{e + s_2}{2 + RCp} \quad (2)$$



Par un diviseur de tension, on obtient aussi :

$$s = \frac{1}{Cp} \frac{s_2}{R + \frac{1}{Cp}} \Leftrightarrow s_2 = s(1 + RCp) \quad (3)$$

Les relations (1) et (3) donnent : $s(1 + RCp)(2 + RCp) = s + s_1$, qui, combinée à (2), donne :

$$s(1 + RCp)(2 + RCp) = s + \frac{e}{2 + RCp} + \frac{s_2}{2 + RCp}$$

En réutilisant (3), on obtient :

$$s(1 + RCp)(2 + RCp) = s + \frac{e}{2 + RCp} + s \frac{(1 + RCp)}{2 + RCp}$$

$$\Leftrightarrow s(1 + RCp)(2 + RCp)^2 = s(2 + RCp) + e + s(1 + RCp)$$

$$\Leftrightarrow s[(1 + RCp)(4 + 4RCp + R^2C^2p^2)] - 2 - RCp - 1 - RCp = e$$

$$\Leftrightarrow s[4 + 4RCp + R^2C^2p^2 + 4RCp + 4R^2C^2p^2 + R^3C^3p^3 - 2 - RCp - 1 - RCp] = e$$

$$\Leftrightarrow s[1 + 6RCp + 5R^2C^2p^2 + R^3C^3p^3] = e.$$

D'où :

$$H(p) = \frac{1}{1 + 6RCp + 5R^2C^2p^2 + R^3C^3p^3}$$

2) L'application du critère de Barkhausen donne : $A_0 H(j\omega_0) = 1$. On a donc :

$$A_0 = 1 + 6jRC\omega_0 - 5R^2C^2\omega_0^2 - jR^3C^3\omega_0^3, \text{ avec } A_0 \in \mathbb{R}.$$

Cette équation est satisfaite si $\Im(A_0) = 0$, soit :

$$6RC\omega_0 - R^3C^3\omega_0^3 = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{6}{R^2C^2} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{6}}{RC}.$$

La fréquence des oscillations est donc :

$$f_0 = \frac{\sqrt{6}}{2\pi RC}.$$

À cette fréquence, on a :

$$A_0 = 1 - 5R^2C^2\omega_0^2, \text{ soit :}$$

$$A_0 = 1 - 5R^2C^2 \times \frac{6}{R^2C^2} = -29 \text{ puisque } H(j\omega_0) = -\frac{1}{29}.$$

L'amplificateur est donc un amplificateur inverseur avec $|A_0| = 29$.

3) Le bouclage se fait selon le schéma classique indiqué au paragraphe F.2 du cours.

Hidden page

La tension d'entrée étant fixée, $|e_1| = \text{cte}$ quelle que soit ω . $|s_1|$ est donc maximale si :

$$C\omega = \frac{1}{L\omega}, \text{ soit : } \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

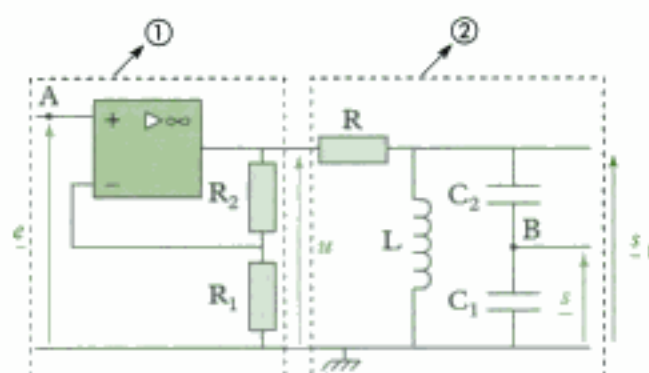


Remarquons qu'à cette fréquence $|Y| \rightarrow 0$ et $|Z| \rightarrow \infty$. Le courant est alors nul dans tout le circuit et $s_1 = e_1$.

Ce circuit est dit « circuit bouchon » pour la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2) On reconnaît deux blocs :

- le bloc ① est un amplificateur non inverseur, avec $\underline{u} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\underline{e}$ ou $\frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$,
- le bloc ②, pour les tensions \underline{u} et \underline{s}_1 , est le bloc étudié à la question 1.



On a donc :

$$\frac{\underline{s}_1}{\underline{u}} = \frac{1}{1 + jR\left(C_{\text{eq}}\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}, \text{ avec } C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Enfin, \underline{s} se déduit de \underline{s}_1 par un diviseur de tension : $\underline{s} = \underline{Z}_{C_1} \frac{\underline{s}_1}{\underline{Z}_{C_1} + \underline{Z}_{C_2}}$, donc :

$$\frac{\underline{s}}{\underline{s}_1} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

On obtient alors : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} \times \frac{\underline{s}_1}{\underline{u}} \times \frac{\underline{s}}{\underline{s}_1}$, soit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}{1 + jR\left(C_{\text{eq}}\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}}$$

dont la forme normalisée : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$,

est celle d'un filtre passe-bande du deuxième ordre avec :

$$H_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right); \quad \frac{Q}{\omega_0} = RC_{\text{eq}} \text{ et } Q\omega_0 = \frac{R}{L}.$$

Donc :

$$Q = R \sqrt{\frac{C_{eq}}{L}} = R \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}$$

et :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}}$$

3) Lorsqu'on relie B à A par un fil, on obtient une structure connue d'oscillateur à réaction. On obtient l'équation différentielle à partir de la fonction de transfert, ce qui donne :

$$\underline{s} \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = H_0 \underline{s}.$$

En utilisant l'analogie formelle $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$, il vient :

$$s(1 - H_0) + \frac{Q}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + Q\omega_0 \int s dt = 0.$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{Q}{\omega_0} \frac{d^2 s}{dt^2} + (1 - H_0) \frac{ds}{dt} + Q\omega_0 s = 0$$

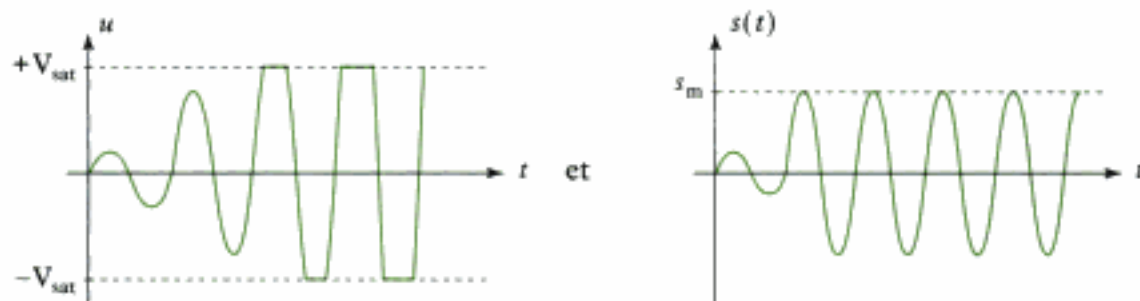
soit encore (cf. méthode n° 1) :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + (1 - H_0) \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

4) En toute rigueur, des oscillations peuvent avoir lieu si : $H_0 = 1$. Ainsi :

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right) = 1 \Leftrightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2$$

Conformément au cours, on observe :



Les oscillations de $s(t)$ sont **pseudo-sinusoïdales**.

Exercice 8

1) L'établissement de la fonction de transfert conduit identiquement à :

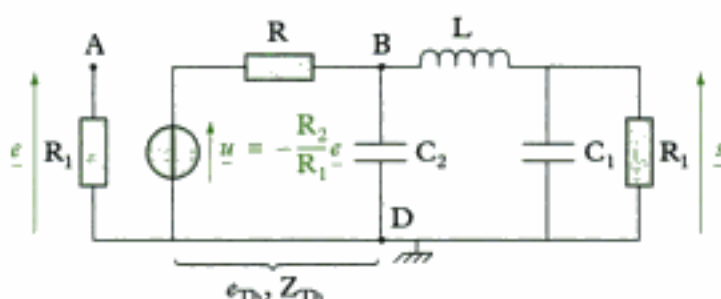
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jR \left(C_{eq} \omega - \frac{1}{L\omega} \right)} = \frac{s}{e}, \text{ avec : } H_0 = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

Or, selon Barkhausen, on doit avoir :

$$\arg(\underline{H}) = 2k\pi, \text{ soit : } \arg(H_0) - \arg \left(1 + jR \left(C_{eq} \omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right) = 2k\pi$$

Hidden page

2) Comme indiqué au paragraphe G. 7, nous devons restituer cette impédance en sortie de la boucle ouverte. Nous obtenons, en modélisant le montage amplificateur selon ce paragraphe :

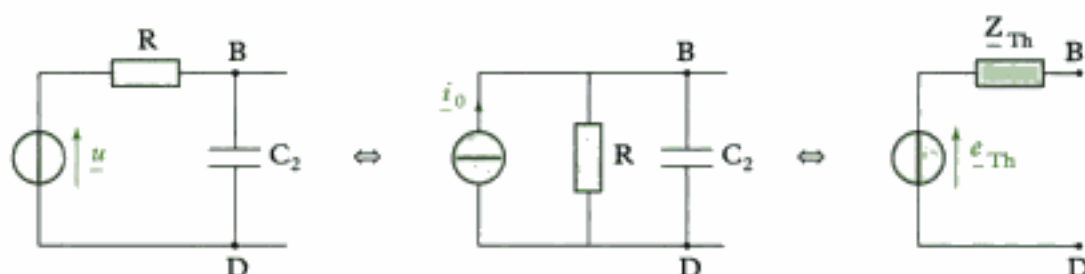


u représente ici la sortie de l'amplificateur opérationnel.

3) Le produit de boucle s'obtient en exprimant la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{s}{e}$$

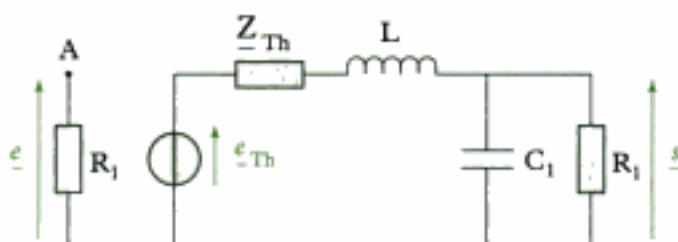
Pour cela, cherchons le générateur de Thévenin équivalent (e_{Th} , Z_{Th}) à u , R et C_2 entre B et D en utilisant les modèles équivalents de Thévenin et de Norton. On obtient :



$$\text{avec } \underline{i}_0 = \frac{u}{R} \text{ et } \underline{Z}_{Th} = \frac{R \times \frac{1}{jC_2\omega}}{R + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{R}{1 + jRC_2\omega}$$

$$\text{et } \underline{e}_{Th} = \underline{Z}_{Th} \underline{i}_0 = \frac{R}{1 + jRC_2\omega} \frac{u}{R} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2C\omega} e$$

Le circuit devient alors :



On peut ensuite exprimer s en fonction de e_{Th} par un diviseur de tension :

$$\underline{s} = \underline{Z}_{eq} \frac{\underline{e}_{Th}}{\underline{Z}_{Th} + \underline{Z}_L + \underline{Z}_{eq}}, \text{ avec } \underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_{R_1 // C_1} = \frac{R_1 \times \frac{1}{jC_1\omega}}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}$$

On obtient donc :

$$\underline{s} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} \times \left(-\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{(1 + jR_2C\omega)} e \times \frac{1}{\frac{R}{1 + jRC_2\omega} + jL\omega + \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

Soit après simplification :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jRC_2\omega + j\frac{L\omega}{R_1} - \frac{R}{R_1}LC_2\omega^2 - LC_1\omega^2 - jRLC_1C_2\omega^3 + \frac{R}{R_1} + jRC_1\omega}$$

4) Le produit de boucle doit être égal à 1, donc réel, ce qui conduit à poser que :

$$\Im m(\underline{H}) = 0,$$

ce qui s'exprime par :

$$RC_2\omega_0 + \frac{L\omega_0}{R_1} - RLC_1C_2\omega_0^3 + RC_1\omega_0 = 0.$$

$$\text{On obtient : } \omega_0^2 = \frac{RC_2 + \frac{L}{R_1} + RC_1}{RLC_1C_2} = \frac{RR_1C_2 + L + RR_1C_1}{RR_1LC_1C_2}, \text{ soit :}$$

$$\omega_0^2 = \frac{RR_1(C_1 + C_2) + L}{RR_1LC_1C_2}$$

À cette pulsation, $\underline{H}(j\omega_0) = 1$, soit :

$$-\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 - \frac{R}{R_1}LC_2\omega_0^2 - LC_1\omega_0^2 + \frac{R}{R_1}} = 1$$

qui représente la condition sur la valeur des composants du circuit.

Exercice 10

1) a) La branche d'impédance $\underline{Z}_s = jL_s\omega + \frac{1}{jC_s\omega}$ est montée en parallèle avec la branche d'impédance $\underline{Z}_0 = \frac{1}{jC_0\omega}$. L'impédance équivalente \underline{Z}_p est donc :

$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_s \underline{Z}_0}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_0} = \frac{\left(jL_s\omega + \frac{1}{jC_s\omega}\right)\left(\frac{1}{jC_0\omega}\right)}{\left(jL_s\omega + \frac{1}{jC_s\omega}\right) + \frac{1}{jC_0\omega}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \underline{Z}_p &= \frac{\frac{1 - L_s C_s \omega^2}{(jC_s\omega)(jC_0\omega)}}{\frac{1 - L_s C_s \omega^2}{jC_s\omega} + \frac{1}{jC_0\omega}} \Leftrightarrow \underline{Z}_p = \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{jC_0\omega(1 - L_s C_s \omega^2) + jC_s\omega} \\ &\Leftrightarrow \underline{Z}_p = \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j\omega(C_0 + C_s) - jC_0\omega L_s C_s \omega^2} \\ &\Leftrightarrow \underline{Z}_p = \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j\omega(C_0 + C_s)\left[1 - \frac{L_s C_0 C_s}{C_0 + C_s}\omega^2\right]} = jX. \end{aligned}$$

Donc :

$$X = -\frac{1 - L_s C_s \omega^2}{\omega(C_0 + C_s)\left[1 - \frac{L_s C_0 C_s}{C_0 + C_s}\omega^2\right]}$$

que l'on identifie à : $X = -\frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}{C\omega\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)}$, avec :

$$\omega_s^2 = \frac{1}{L_s C_s}, \quad \omega_p^2 = \frac{C_0 + C_s}{L_s C_0 C_s} \quad \text{et} \quad C = C_0 + C_s$$

X peut aussi se mettre sous la forme :

$$X = \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)} \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2} = -\frac{1}{C\omega} \frac{\omega^2\left(\frac{\omega_s^2}{\omega^2} - 1\right)(C_0 + C_s)}{\omega^2\left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1\right)C_0} = -\frac{1}{\omega C_0} \frac{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \quad \text{puisque } C = C_0 + C_s.$$

Commentaire : on a aussi $\omega_p^2 = \frac{1}{L_s C}$ avec $C = \frac{C_0 C_s}{C_0 + C_s}$ comme si C_0 était en série avec C_s .

b) $L_s = 1\,000\text{ H}$; $C_s = 0,4\text{ pF}$; $C_0 = 60\text{ pF}$.

A.N. : $\omega_s = 5 \cdot 10^4\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

À cette pulsation, Z_p est nulle. Le dipôle MN est en court-circuit.

A.N. : $\omega_p = 5 \cdot 10^4\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

À cette pulsation, $Z_p \rightarrow \infty$. Le dipôle MN est équivalent à un interrupteur ouvert.

Une meilleure précision des données aurait permis de distinguer les deux pulsations dont l'écart relatif est :

$$\frac{\omega_s - \omega_p}{\omega_s} = 1 - \frac{\omega_p}{\omega_s} = 1 - \sqrt{\frac{C_0 + C_s}{L_s C_0 C_s}} \times L_s C_s = 1 - \sqrt{\frac{C_0 + C_s}{C_0}}$$

A.N. : $\frac{\omega_s - \omega_p}{\omega_s} = -3 \cdot 10^{-3}$, ce qui montre que ces deux valeurs sont très proches.

c) Les composants du modèle inductance L et condensateur C ne sont pas parfaits. Ils possèdent **une résistance**, ce qui empêche l'impédance de devenir nulle, ou infinie.

2) À la pulsation ω_s , l'impédance de la branche R_s, L_s, C_s est $R_s = 10\ \Omega$. Pour la même pulsation, l'impédance de la branche contenant C_0 est :

$$Z_0 = \frac{1}{C_0 \omega_s} = \frac{1}{60 \cdot 10^{-12} \times 5 \cdot 10^4} = 10^5\ \Omega.$$

La branche contenant C_0 peut être considérée comme ouverte et le schéma équivalent se réduit à celui indiqué.

3) a) On a : $\underline{H} = \frac{V_s}{\underline{I}_c}$, et donc :

$$\underline{H} = A$$

De même, $\underline{I}_c = \underline{E} - \underline{I}_K = -\underline{I}_K$ puisque l'entrée est nulle.



\underline{E} est usuellement la notation d'une tension, mais il faut savoir s'adapter aux notations du concours.

Hidden page

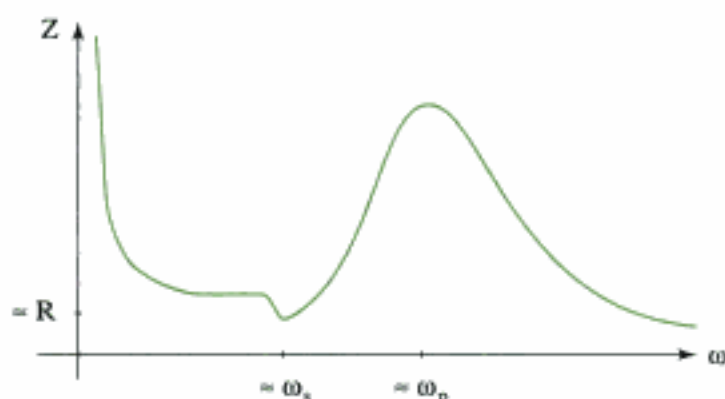
Hidden page

$$\Leftrightarrow |Z|_{\omega=\omega_p} = \frac{\sqrt{1+R^2C'^2\omega_p^2}}{\omega_p^2 C'^2 R} = \frac{1}{\omega_p^2 C'^2 R} \sqrt{1+R^2C'^2\left(\frac{C'+C}{LC'C}\right)}$$

$$\Leftrightarrow |Z|_{\omega=\omega_p} = \frac{LC'C}{C'+C} \frac{1}{C'^2 R} \sqrt{1+R^2C'^2\left(\frac{C'+C}{LC'C}\right)}$$

$$|Z|_{\omega=\omega_p} = \frac{LC}{(C'+C)} \frac{1}{RC'} \sqrt{1+R^2C'^2\left(\frac{C'+C}{LC'C}\right)}$$

Nous obtenons alors :



d) • Pour $\omega < \omega_s$ et $\omega > \omega_p$, Z est une fonction décroissante de ω ; le quartz peut alors être assimilé à une capacité \mathcal{C} telle que, selon (1), en supposant $R = 0$:

$$\frac{1}{j\omega\mathcal{C}} = \frac{1}{j\omega C'} \frac{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \text{ donc : } \mathcal{C} = C' \frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right)}$$

Remarques :

– Si $\omega \rightarrow \infty$, alors : $\mathcal{C} \rightarrow C'$.

– Si $\omega \rightarrow 0$, alors : $\mathcal{C} \rightarrow C' \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2}$.

• Si $\omega_s < \omega < \omega_p$, Z est une fonction décroissante de ω ; le quartz est équivalent à une inductance. Selon (1), on a alors :

$$j\mathcal{L}\omega = -\frac{j}{\omega C'} \frac{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}, \text{ donc : } \mathcal{L} = -\frac{1}{\omega^2 C'} \frac{\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\right)}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$$

Remarques :

– Si $\omega \rightarrow \omega_s$, alors : $\mathcal{L} \rightarrow 0$.

– Si $\omega \rightarrow \omega_p$, alors : $\mathcal{L} \rightarrow \infty$.

e) On obtient numériquement :

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 35,588 \text{ MHz}$$

et

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC'C}} = 35,606 \text{ MHz}$$

2) a) et b) Nous donnons les grandes lignes du calcul en premier, puis en appliquant les lois de Kirchhoff, nous détaillons une autre méthode de résolution.

On obtient :

$$V_{ds} = V_{gs} \frac{(1 + sL_0\omega)}{j\left(1 - L_0C_0 - \frac{L_0\omega}{R_D}\right)}$$

et

$$V_{ds} = V_{gs} \left(\frac{1}{R_G} + jC_0 \frac{1}{jL_0\omega} \right) jL_0\omega$$

Par égalisation, on obtient :

$$\frac{j + sL_0\omega}{j(1 - L_0C_0\omega^2) - \frac{L_0\omega}{R_D}} - \left(1 - L_0C_0\omega^2 + \frac{jL_0\omega}{R_G}\right) = 0$$

Ce qui donne deux équations en égalant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} s = (L_0C_0\omega^2 - 1) \left(\frac{1}{R_D} - \frac{1}{R_G} \right) \\ \frac{L_0}{R_D R_G} = (L_0C_0\omega^2 - 2)C_0 \end{cases}$$

Si $R_G \rightarrow \infty$, alors : $s = \frac{L_0C_0\omega^2 - 1}{R_D}$ et $L_0C_0\omega^2 = 2$, soit :

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{L_0C_0}}$$

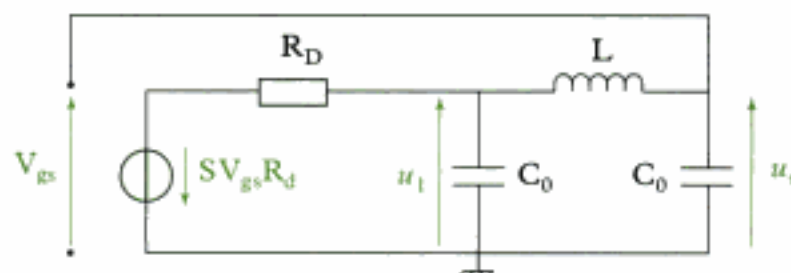
qui est la pulsation des oscillations.

• Autre méthode de résolution

Nous posons $R_D \rightarrow \infty$, ce qui est le cas pour cette utilisation du transistor.

Conformément à ce que nous avons vu au paragraphe K. 1 du cours, nous remplaçons le générateur de Norton par son équivalent de Thévenin. Ensuite, nous calculons la transmittance de la boucle, ici ouverte.

Nous obtenons alors :



Nous appelons u_s la tension de sortie et nous cherchons à exprimer $\frac{s}{V_{gs}}$. Le théorème de Millman donne :

$$u_1 = \frac{-\frac{SV_{gs}R_D}{R_D} + \frac{u_s}{Lp}}{\frac{1}{R_D} + \frac{1}{Lp} + C_0p} \quad (2)$$

Par un diviseur de tension, on obtient :

$$u_i = \frac{1}{C_0 p} \frac{u_1}{Lp + \frac{1}{C_0 p}} \Leftrightarrow u_1 = (1 + LC_0 p^2) u_i \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) donnent :

$$u_s \left[(1 + LC_0 p^2) u_s \left[\frac{1}{R_D} + \frac{1}{Lp} + C_0 p \right] - \frac{1}{Lp} \right] = -s V_{gs},$$

et après simplification :

$$\frac{u_s}{V_{gs}} = \frac{-s}{\underbrace{\frac{1}{R_D} + \frac{LC_0 p^2}{R_D}}_{\mathcal{Re}} + \underbrace{[LC_0^2 p^3 + 2pC_0]}_{\mathcal{Im}}}$$

On aura des oscillations si : $u_s = V_{gs}$ (ou $\underline{AB} = 1$). Il faut pour cela que la partie imaginaire soit nulle, et donc :

$$LC_0 p^3 + 2pC_0 = 0 \Leftrightarrow LC_0 p^2 + 2C_0 = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{2}{LC_0}$$

solution identique à celle trouvée précédemment.

L'autre condition est que : $|H(j\omega_0)| = 1$, et donc :

$$\frac{-s}{\frac{1}{R_D} - \frac{LC_0 \omega_0^2}{R_D}} = 1.$$

Or $\frac{LC_0 \omega_0^2}{R_D} = \frac{LC_0}{R_D} \times \frac{2}{LC_0} = \frac{2}{R_D}$, donc :

$$s = \frac{1}{R_D}$$

c) i) Le montage, réglé comme indiqué à la question précédente, peut osciller si le quartz se comporte comme une inductance L_0 . On a vu à la question 1) d) qu'il fallait :

$$\omega_s < \omega < \omega_p$$

ii) Dans le cas d'une inductance L , ce coefficient est **indépendant de ω** .

Dans le cas du quartz modélisé, \mathcal{L} est une **fonction croissante de ω** , puisque $Z(\omega)$ est elle-même une fonction croissante de ω .

Si ω , la pulsation d'excitation du quartz, change, en augmentant, par exemple, l'inductance, \mathcal{L} augmente puisque :

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} > 0 \quad (\text{voir courbes des questions 1) b) et 1) c}).$$

En conséquence, si \mathcal{L} augmente, ω_0 diminue puisque :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}C}}.$$

L'effet est opposé à la cause. **Le système est régulé et stable, ce qui n'est pas le cas pour l'inductance.**

iii) $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{L}C_0}}$, avec $\mathcal{L} = -\frac{1}{\omega^2 C'} \left(\frac{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right)$. On a donc :

$$\omega_0^2 = \frac{2}{-\frac{1}{\omega_0^2 C'} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega_s^2}{\omega_0^2 - \omega_p^2} \right] C_0} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{2C'\omega_0^2(\omega_p^2 - \omega_0^2)}{C_0(\omega_0^2 - \omega_s^2)}$$

$$\Leftrightarrow C_0\omega_0^4 - C_0\omega_s^2\omega_0^2 = 2C'\omega_p^2\omega_0^2 - 2C'\omega_0^4.$$

On obtient ainsi :

$$\omega_0^2 = \frac{2C'\omega_p^2 + C_0\omega_s^2}{C_0 + 2C'}.$$

En remplaçant ω_p^2 et ω_s^2 par leur expression, il vient :

$$\omega_0^2 = \frac{2C' \left(\frac{C' + C}{LCC'} \right) + C_0 \frac{1}{LC}}{C_0 + 2C'} = \frac{2(C' + C) + C_0}{LC(C_0 + 2C')} = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{2C}{C_0 + 2C'} \right)$$

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \frac{2C}{C_0 + 2C'}}}{\sqrt{LC}}$$

A.N. : $f = 35,595$ MHz.

Hidden page

Comparateurs et oscillateurs à relaxation

Introduction

Nous avons vu, au chapitre 6, comment générer un signal quasi sinusoïdal. Cependant, dans un système électronique, un signal d'horloge n'est pas nécessairement sinusoïdal. Il suffit d'un phénomène périodique assurant précision et stabilité de la période. En ce sens, les oscillateurs à relaxation (ou multivibrateur) délivrant un signal rectangulaire périodique sont plus simples à mettre en œuvre, en utilisant notamment la saturation en sortie d'un amplificateur opérationnel, qui fonctionne donc en mode non linéaire. Comme les oscillateurs quasi sinusoïdaux, ces oscillateurs s'auto-entretiennent et génèrent un signal périodique, non sinusoïdal, à partir de leur source d'alimentation continue.

Plan du chapitre 7

A. Oscillateur à relaxation ou multivibrateur	298
B. Comparateurs de tensions	298
1. Comparateur analogique simple à amplificateur opérationnel	298
2. Comparateur à hystérésis	301
C. Oscillateur à relaxation ou multivibrateur astable : cas général	306
D. Multivibrateur à pseudo-intégrateur	307
1. Montage et fonctionnement	307
2. Chronogrammes	308
3. Calcul de la période des oscillations	309
4. Fonctionnement en intégrateur vrai	310
5. Rapport cyclique et contrôle de la fréquence	311
E. Multivibrateur à intégrateur à amplificateur linéaire	313
1. Analyse du fonctionnement du circuit	314
2. Expression de la période	314
3. Côté laboratoire	315
4. Contrôle de la fréquence et du rapport cyclique	316
F. Génération de signaux sinusoïdaux par filtrage	316
G. Conclusion	319
Méthodes	
L'essentiel ; mise en œuvre	320
Énoncés des exercices	324
Solution des exercices	327

Hidden page

B.1.2 - Cas pratique en fonctionnement dynamique

• Étude préliminaire

Dans le cas d'un comparateur non inverseur à AO, le montage est celui de la figure 2 dont la caractéristique $s(e)$ est en figure 3.

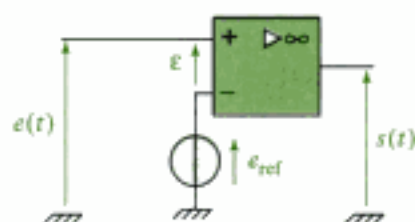


Fig. 2 - Montage comparateur non inverseur à AO.

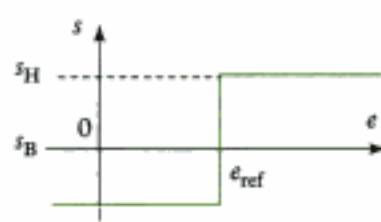


Fig. 3 - Caractéristique d'un montage comparateur non inverseur.

Si $e(t) > e_{ref}$, alors : $\varepsilon = e(t) - e_{ref} > 0$, et donc :

$$s = s_H = +V_{sat}.$$

Réciproquement, si $e(t) < e_{ref}$, alors : $\varepsilon = e(t) - e_{ref} < 0$, et donc :

$$s = s_B = -V_{sat}.$$

Les résultats concernant le cas du comparateur inverseur sont indiqués en figures 4 et 5. La tension de référence peut être nulle (mise à la masse de l'entrée correspondante) comme dans l'exemple de la figure 6.

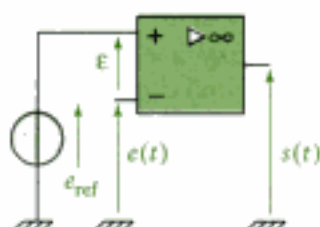


Fig. 4 - Montage comparateur inverseur à amplificateur opérationnel.



Fig. 5 - Caractéristique de transfert d'un montage comparateur inverseur.

Lorsque le signal de sortie passe d'un état à l'autre, il y a **commutation**.

Pour simplifier l'étude, nous choisissons de prendre $e_{ref} = 0$, ce qui revient à mettre la borne inverseuse à la masse dans le cas d'un comparateur non inverseur, la conséquence intéressante étant que $e(t) = \varepsilon(t)$ (fig. 6).

• Étude pratique

En pratique, en soumettant ce comparateur non inverseur à une tension triangulaire² d'amplitude $E_m = 10$ V et de fréquence $f = 1\,000$ Hz, nous relevons le chronogramme suivant (fig. 7) (basclements si $e(t) = 0$ V).

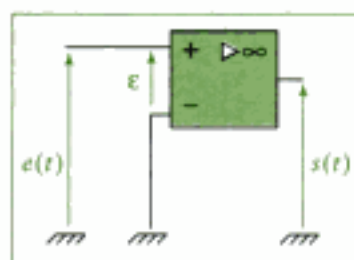


Fig. 6 - Montage comparateur non inverseur avec tension de référence nulle.

2. Ou à une impulsion de tension triangulaire.

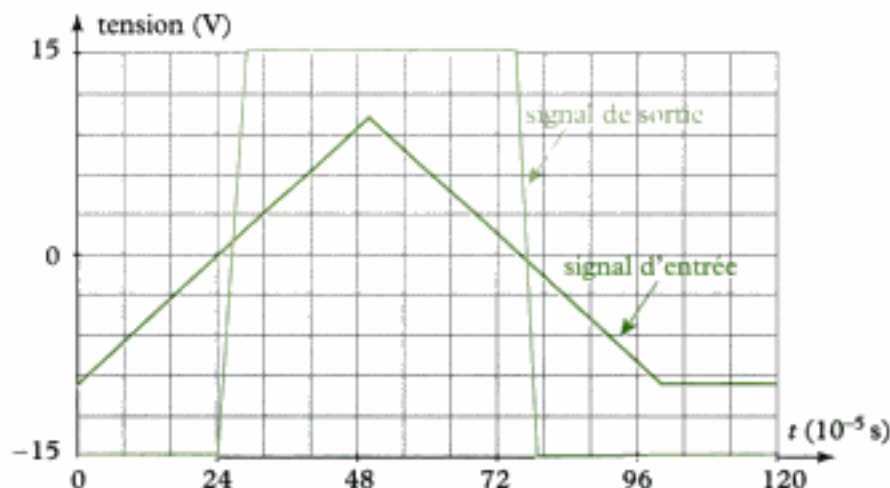


Fig. 7 - Chronogrammes de la tension d'entrée triangulaire et de la tension de sortie correspondante pour un comparateur non inverseur à tension de référence nulle.

Nous observons sur ce chronogramme que l'amplificateur opérationnel, en raison de ses imperfections (cf. chapitre 3), ne peut pas commuter instantanément de la valeur $-V_{\text{sat}}$ à la valeur $+V_{\text{sat}}$.

Dans ce cas, pendant la commutation, la vitesse de montée du signal de sortie est égale au *slew rate* (cf. chapitre 3).

Application 1 Temps de commutation d'un AO

Déterminer le temps de commutation pour un AO de type 741.

Solution

Pour un AO de type 741, le temps de commutation est ici :

$$t_c = 2 \times \frac{V_{\text{sat}}}{\text{SR}} = 2 \times \frac{15}{0,5 \cdot 10^6} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 0,06 \text{ ms}^1,$$

ce que confirme le chronogramme de la figure 7.

1. En pratique, on peut utiliser des comparateurs intégrés spécialisés, comme le LF 311 dont le temps de commutation est de l'ordre de 200 ns, soit une amélioration d'un facteur 300.

Si nous souhaitons négliger le temps de commutation, il faut que la période T du signal soit très supérieure à la durée des deux commutations ayant lieu pendant cette période :

$$T = \frac{1}{f} \gg 2t_c \Leftrightarrow f \ll \frac{1}{2t_c}, \text{ soit ici : } f \ll 8,3 \text{ kHz}.$$

La pente du signal de sortie étant liée à la vitesse de balayage, on observe le phénomène de **triangulation** classique d'un signal carré (fig. 7) : le signal de sortie est en retard sur le signal d'entrée.

En mode X, Y, observons la caractéristique de transfert de ce montage.

Le temps de commutation se manifeste par un effet d'hystérésis. Le chemin à l'aller ne correspond pas à celui de retour (fig. 8a).

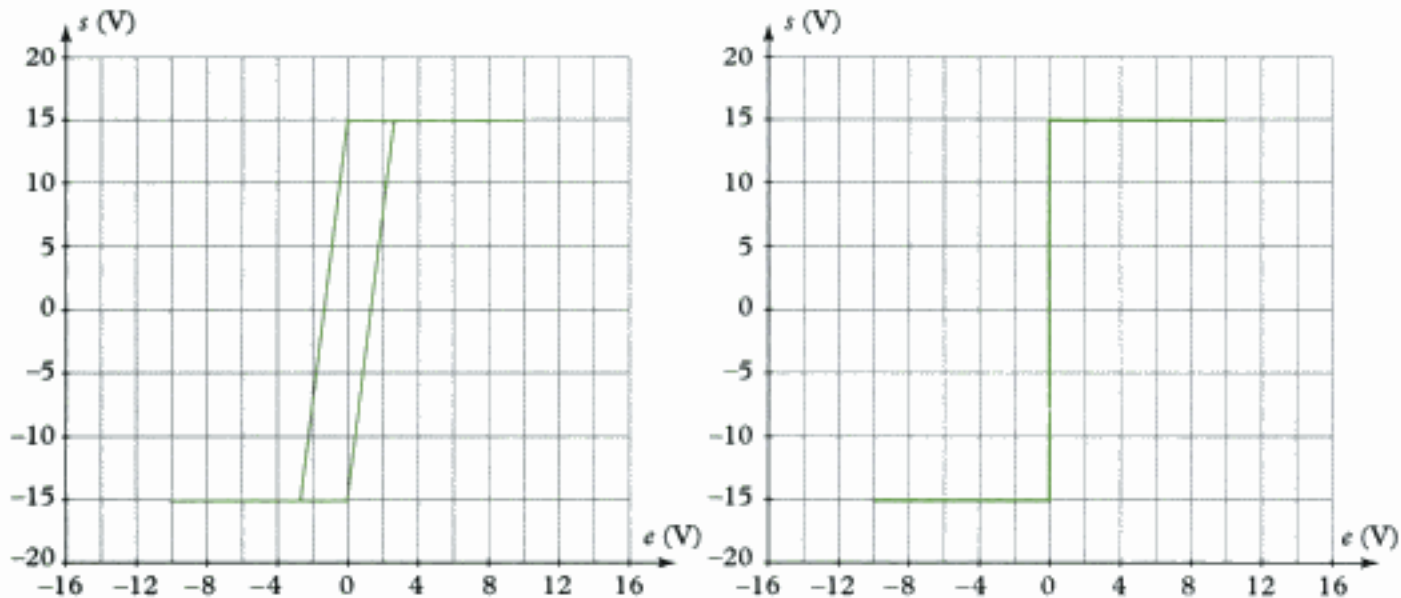


Fig. 8 - Caractéristique de transfert d'un comparateur non inverseur :

a) réel montrant le phénomène d'hystérésis ; b) parfait (ou se comportant comme tel).

Remarque :

Nous ne développons pas l'influence d'une tension de décalage ϵ_d , ou d'offset de l'amplificateur opérationnel. Le cycle d'hystérésis est alors centré sur $\epsilon_{\text{ref}} - \epsilon_d$. Pour des signaux de tension égale à quelques volts, ϵ_d (de l'ordre de quelques mV) est négligeable.

Hidden page

Hidden page

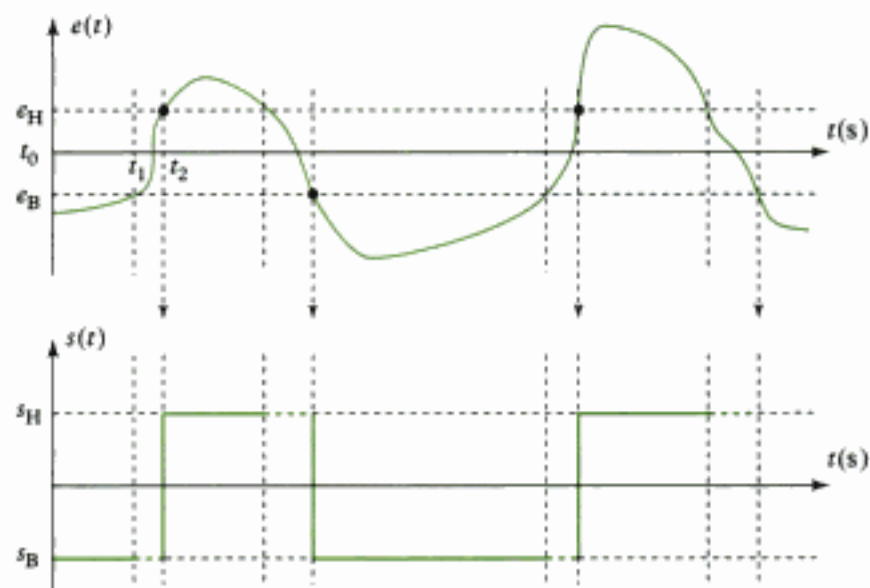


Fig. 15 - Illustration de la fonction mémoire en utilisant un comparateur à hystérésis.

La figure 15 illustre la notion de fonction mémoire utilisant un comparateur à hystérésis dont les seuils sont e_B et e_H . Si $e(t)$ croît depuis une valeur inférieure à e_B , tant que $e(t) < e_H$ (de t_0 à t_2 par exemple), alors $s(t) = s_B$.

Tant que $e(t) < e_B$ (de t_0 à t_1 par exemple), la sortie est naturellement à l'état bas s_B (trait plein sur la figure 15) : la sortie est commandée par l'entrée. Par contre, lorsque $e_B < e(t) < e_H$, (de t_1 à t_2 par exemple), alors $s(t) = s_B$ (trait pointillé sur le dessin) : la sortie n'est pas commandée par l'entrée. L'effet mémoire se manifeste alors puisque le système garde le souvenir de son état antérieur¹.

Définition 2

Une **mémoire** est une sous-partie d'un système qui assure la fonction de recevoir, conserver et restituer l'information. L'entité élémentaire de la mémoire conserve généralement une **information binaire** (0 ou 1)².

• Qualités exigées d'une mémoire

Non volatilité³ : une mémoire est volatile si l'information stockée disparaît lorsque la tension d'alimentation cesse, et respectivement non volatile dans le cas contraire.

Fiabilité : le niveau de stockage (0 ou 1) doit être garanti contre les perturbations extérieures.

Durée de transition : la mémoire sera d'autant plus performante que la durée de transition en entrée et en sortie est petite et que le temps de propagation, qui sépare l'établissement de deux mêmes états successifs, est petit.

Encombrement et consommation énergétique : une mémoire est d'autant plus intéressante que son encombrement est réduit (mémoire à circuits intégrés⁴) et que sa consommation énergétique est petite.

B.2.1.4 - Le comparateur à hystérésis est-il une mémoire intéressante ?

Il constitue une mémoire volatile, dont la fiabilité peut être assurée en réglant la largeur du cycle d'hystérésis⁵. Les durées de transition (150 μ s) sont par contre longues.

1. Ce même effet mémoire peut aussi être obtenu par les deux états opposés d'aimantation des limites du cycle d'hystérésis d'un matériau magnétique. Ainsi stocke-t-on l'information sur des matériaux magnétiques déposés en surface (disque dur d'ordinateur, bande audio...).

2. Les états s_B et s_H peuvent en effet être perçus comme des niveaux logiques.

3. Ce critère de qualité est relatif à l'emploi fait de la mémoire. Dans un ordinateur, la qualité d'une mémoire RAM est d'être volatile ; pour la mémoire ROM, c'est d'être non-volatile.

4. Circuit intégré : circuit de petite dimension pouvant comprendre résistances, capacités, inductances, diodes, transistors, obtenus par dépôt de couches isolantes et conductrices sur un substrat semi-conducteur.

5. Ce réglage se fait par l'intermédiaire de résistances, R_1 et R_2 par exemple en figure 16.

La consommation est élevée et l'encombrement, du fait de composants discrets, amplificateur opérationnel, résistances, est très important.

En conclusion, le comparateur à hystérésis réalise la fonction mémoire, mais plusieurs qualités essentielles lui manquent.

B.2.2 - Réalisation pratique d'un comparateur à hystérésis non inverseur

Le montage est celui de la figure 16.



1. Symbole d'un comparateur à hystérésis non inverseur.

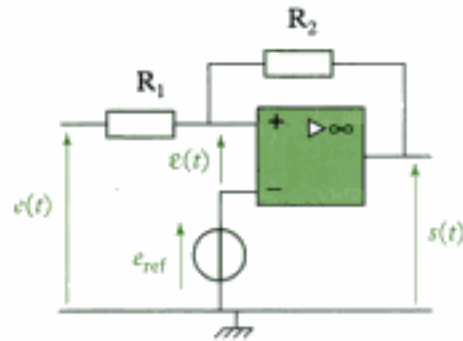


Fig. 16 - Comparateur à deux seuils utilisant un AO.

Remarque : du fait de la seule réaction sur l'entrée non inverseuse, l'amplificateur ne peut fonctionner en régime linéaire.

• Supposons que $s(t) = +V_{\text{sat}}$, alors : $\epsilon(t) > 0$.

$$\text{Or, } \epsilon(t) = e^+ - e^-, \text{ avec } e^+ = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ et } e^- = e_{\text{ref}}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} - e_{\text{ref}} > 0, \text{ donc : } e > \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)e_{\text{ref}} - \frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}, \text{ soit :}$$

$$e > e_B, \text{ avec } e_B = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)e_{\text{ref}} - \frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$$

Le basculement de $s(t) = +V_{\text{sat}}$ à $s(t) = -V_{\text{sat}}$ se produit lorsque $\epsilon = 0$, soit pour la tension d'entrée :

$$e = e_B$$

c'est-à-dire à la décroissance de $e(t)$ depuis la valeur maximale de e , puisque par hypothèse de départ $e > e_B$ pour que la sortie soit saturée à $s(t) = +V_{\text{sat}}$. Lors de cette évolution, le tracé de $s(e)$ est celui de la figure 12.

• Supposons que $s(t) = -V_{\text{sat}}$, alors : $\epsilon(t) < 0$.

$$\text{Or, } \epsilon(t) = e^+ - e^-, \text{ avec } e^+ = \frac{\frac{e}{R_1} - \frac{V_{\text{sat}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ et } e^- = e_{\text{ref}}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\frac{e}{R_1} - \frac{V_{\text{sat}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} - e_{\text{ref}} < 0, \text{ donc : } e < \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)e_{\text{ref}} + \frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}, \text{ soit :}$$

$$e < e_H, \text{ avec } e_H = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)e_{\text{ref}} + \frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$$

Le basculement de $s(t) = -V_{\text{sat}}$ à $s(t) = +V_{\text{sat}}$ se produit lorsque $\varepsilon = 0$, soit pour la tension d'entrée :

$$e = e_H$$

c'est-à-dire à la croissance de $e(t)$ depuis sa valeur minimale, puisque par hypothèse de départ, $e < e_H$ pour que la sortie soit saturée à $s(t) = -V_{\text{sat}}$.

Lors de cette évolution, le tracé de $s(e)$ est celui de la [figure 11](#).

- Le cycle d'hystérésis pour largeur $\Delta e = e_H - e_B = 2\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$ et pour centre le point C représentant la tension :

$$e_C = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)e_{\text{ref}}$$

Remarque : les tensions de seuil e_B et e_H sont symétriques par rapport à la tension $e_C = \frac{R_1 + R_2}{R_2}e_{\text{ref}}$, qui se réduit à 0 si $e_{\text{ref}} = 0$, et éloignés de $\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$ de cette tension.

- Le tracé du cycle d'hystérésis, pour une tension d'entrée dont la valeur oscille entre e_M et e_m est donné en [figure 17](#).

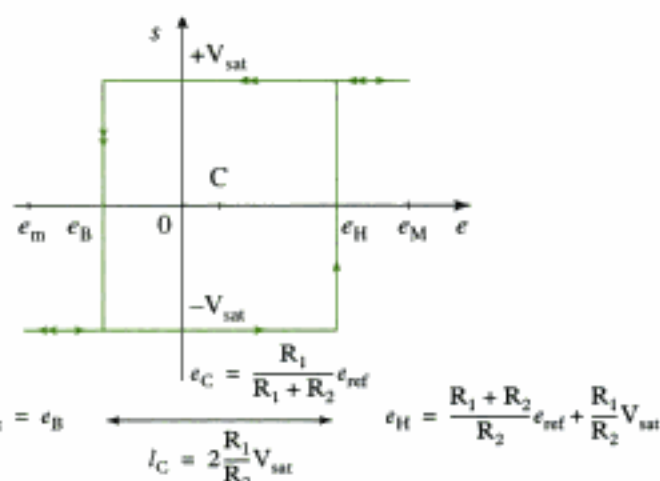


Fig. 17 - Cycle d'hystérésis décentré pour un comparateur à hystérésis non inverseur.

B.2.3 - Comparateur à hystérésis inverseur à amplificateur linéaire intégré

Le montage est celui de la [figure 18](#) et son symbole est en [figure 19](#).

- Supposons que $s(t) = +V_{\text{sat}}$, alors : $\varepsilon(t) > 0$.

$$\text{Or, } \varepsilon(t) = e^+ - e^-, \text{ avec } e^+ = \frac{e_{\text{ref}}}{R_1} + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2} \text{ et } e^- = e.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{R_2 e_{\text{ref}} + R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} - e > 0, \text{ donc : } e < \frac{R_2 e_{\text{ref}}}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}, \text{ soit :}$$

$$e < e_H, \text{ avec } e_H = \frac{R_2 e_{\text{ref}}}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

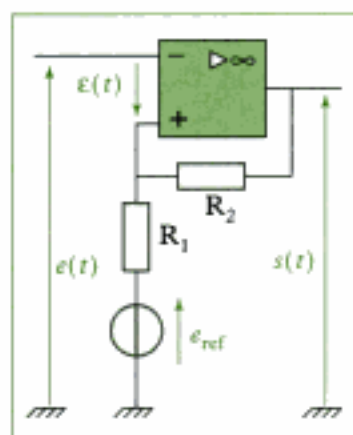


Fig. 18 - Comparateur à hystérésis inverseur.



Fig. 19 - Symbole d'un comparateur à hystérésis inverseur.

Le basculement de $s(t) = +V_{\text{sat}}$ à $s(t) = -V_{\text{sat}}$ se produit lorsque $\varepsilon = 0$, soit pour la tension d'entrée :

$$e = e_H$$

c'est-à-dire forcément à la croissance de $e(t)$ depuis sa valeur minimale.

Lors de cette évolution, le tracé de $s(t)$ est celui de la [figure 14](#) pour partie.

• Supposons que $s(t) = -V_{\text{sat}}$, alors : $\varepsilon(t) < 0$.

Or, $\varepsilon(t) = e^+ - e^-$, avec $e^+ = \frac{\frac{e_{\text{ref}}}{R_1} - \frac{V_{\text{sat}}}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$ et $e^- = e$.

Ainsi : $\frac{R_2 e_{\text{ref}} - R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} - e < 0$, donc : $e > \frac{R_2 e_{\text{ref}}}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$, soit :

$e > e_B$, avec $e_B = \frac{R_2 e_{\text{ref}}}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$

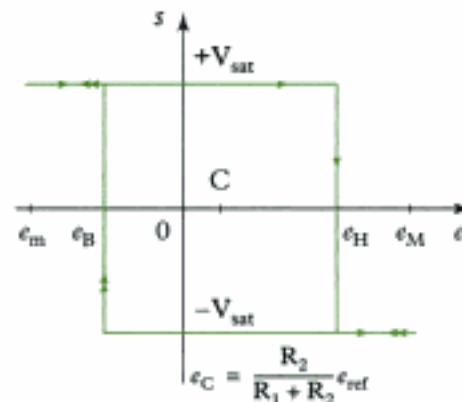
Le basculement de $s(t) = -V_{\text{sat}}$ à $s(t) = +V_{\text{sat}}$ se produit lorsque $\varepsilon = 0$, soit pour la tension d'entrée :

$$e = e_B$$

c'est-à-dire à la décroissance de $e(t)$ depuis sa valeur maximale, puisque par hypothèse de départ, $e < e_B$ pour que la sortie soit saturée à $s(t) = -V_{\text{sat}}$.

Lors de cette évolution, le tracé de $s(e)$ est celui de la [figure 14](#) pour partie.

- Le cycle a pour largeur $\Delta e = 2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$ et pour centre $e_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_{\text{ref}}$.
- Le tracé du cycle, pour une tension d'entrée dont la valeur oscille entre e_M et e_m est donné en [figure 20](#) :



$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} e_{\text{ref}} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = e_B \quad \longleftrightarrow \quad e_H = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_{\text{ref}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

$$I_C = 2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}$$

Fig. 20 - Cycle d'hystérésis décentré pour un comparateur à hystérésis inverseur¹.

1. Si $e(t) = 0$ V, on obtient un cycle centré sur (0,0) quel que soit le type de comparateur à hystérésis.

C. Oscillateur à relaxation ou multivibrateur astable : cas général

Il nous reste à adjoindre au comparateur à deux seuils précédent le réservoir d'énergie qui se remplit et se vide au cours du temps.

Définition 3

Un montage **astable** est un générateur autonome qui délivre en sortie un signal rectangulaire périodique. Pour y parvenir, ce montage oscille entre deux états instables. Le basculement du système d'un état à l'autre a lieu avant que l'état stable précédent ne soit atteint.

1. Il est bien entendu possible d'utiliser un autre circuit assurant cette fonction mais le circuit R,C à l'avantage d'être simple et peu cher.

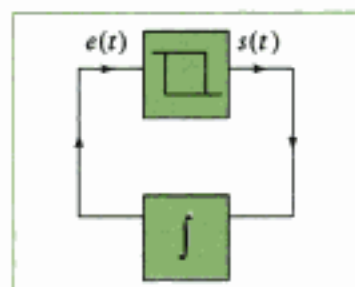


Fig. 21 - Schéma fonctionnel d'un multivibrateur astable. Le comparateur à hystérésis est ici inverseur².

2. Par choix, nous prenons $e(t)$ et $s(t)$ aux bornes du comparateur à hystérésis. En boucle, ces notions sont relatives.

3. Rappelons la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur.

Dans la définition, il apparaît la nécessité d'avoir :

- un comparateur (basculement) ;
- un inverseur à deux seuils (deux états instables atteint en sens contraires) ;
- un circuit R,C (avec sortie aux bornes de la capacité C) assurant l'évolution périodique du système¹.

Or un circuit R,C avec sortie aux bornes de C, est essentiellement un pseudo-intégrateur ou un intégrateur.

Le schéma fonctionnel en boucle est donné en figure 21.

Choisissons l'état (a) de départ au moment où le signal $e(t)$ atteint en croissant le seuil e_H du comparateur de la figure 19. La sortie $s(t)$ passe alors à l'état bas s_B ; le nouveau seuil devient immédiatement e_B .

Du fait de la présence du condensateur³, l'intégration de l'état bas s_B fait diminuer la tension de sortie $e(t)$ de l'intégrateur jusqu'au seuil e_B où la sortie du comparateur à hystérésis passe à l'état haut s_H : le nouveau seuil devient immédiatement e_H . Du fait de la présence du condensateur, l'intégration de l'état haut s_H fait augmenter la sortie $e(t)$ de l'intégrateur jusqu'au seuil e_H où la sortie du comparateur à hystérésis passe à l'état bas s_B noté (b).

La boucle est fermée ; nous nous retrouvons en (b), au début de la description de l'évolution du système en (a). Le système oscille donc de manière périodique.

D. Multivibrateur à pseudo-intégrateur

Dans ce cas, le circuit ne comprend qu'un seul amplificateur opérationnel et il suffit de transcrire le schéma fonctionnel de la figure 21.

D.1. Montage et fonctionnement

• Montage

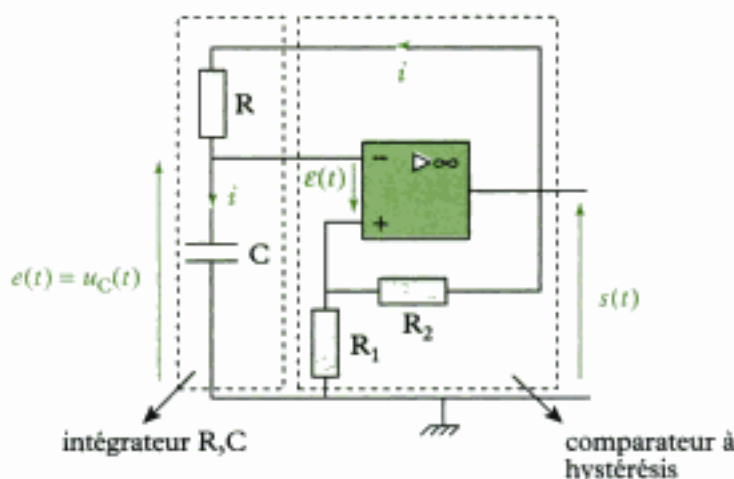


Fig. 22 - Multivibrateur à pseudo-intégrateur.

Pour le comparateur à hystérésis inverseur, nous avons ici $e_{ref} = 0$.

• Fonctionnement

Par un diviseur de tension, nous obtenons :

$$e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s = \beta s, \text{ avec } \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ et donc } \beta < 1.$$

À $t = 0$, supposons que $u_C(t = 0) = 0$ V.

Supposons que $s(t = 0) = +V_{\text{sat}}$. Nous avons donc : $e^+ = \beta V_{\text{sat}}$, qui se confond avec e_H .

Le condensateur commence à se charger et évolue vers un état stable qui serait $u_C = +V_{\text{sat}}$ (fig. 23). Lors de cette évolution, la tension u_C est comparée (par l'intermédiaire de e) à la tension $e_H = \beta V_{\text{sat}}$ inférieure à V_{sat} .

La tension de sortie $s(t)$ garde la valeur V_{sat} tant que $e > 0$, c'est-à-dire si $u_C = e(t) < \beta V_{\text{sat}} = e_H$.

Lorsque $u_C(t) = e_H = \beta V_{\text{sat}}$, c'est-à-dire avant l'état stable $u_C = V_{\text{sat}}$, la tension de sortie bascule à $-V_{\text{sat}}$.

Le condensateur se décharge alors à travers la résistance R jusque vers un état stable qui serait $u_C = -V_{\text{sat}}$. En raison du basculement, le seuil a changé, il est maintenant égal à $e^+ = e_B = -\beta V_{\text{sat}}$.

Cette décharge a lieu tant que $e < 0$, c'est-à-dire si $u_C = e(t) > -\beta V_{\text{sat}}$.

Lorsque $e(t) = -\beta V_{\text{sat}} = e_B$, c'est-à-dire avant l'état stable $u_C = -V_{\text{sat}}$, la tension de sortie bascule à $+V_{\text{sat}}$.

Nous sommes revenus à $s(t) = +V_{\text{sat}}$. L'évolution temporelle des grandeurs électriques du circuit est donc la même que précédemment.

Le système oscille donc entre deux états instables, de manière périodique.

L'hypothèse $s(t = 0) = -V_{\text{sat}}$ conduit au même résultat.

D.2. Chronogrammes

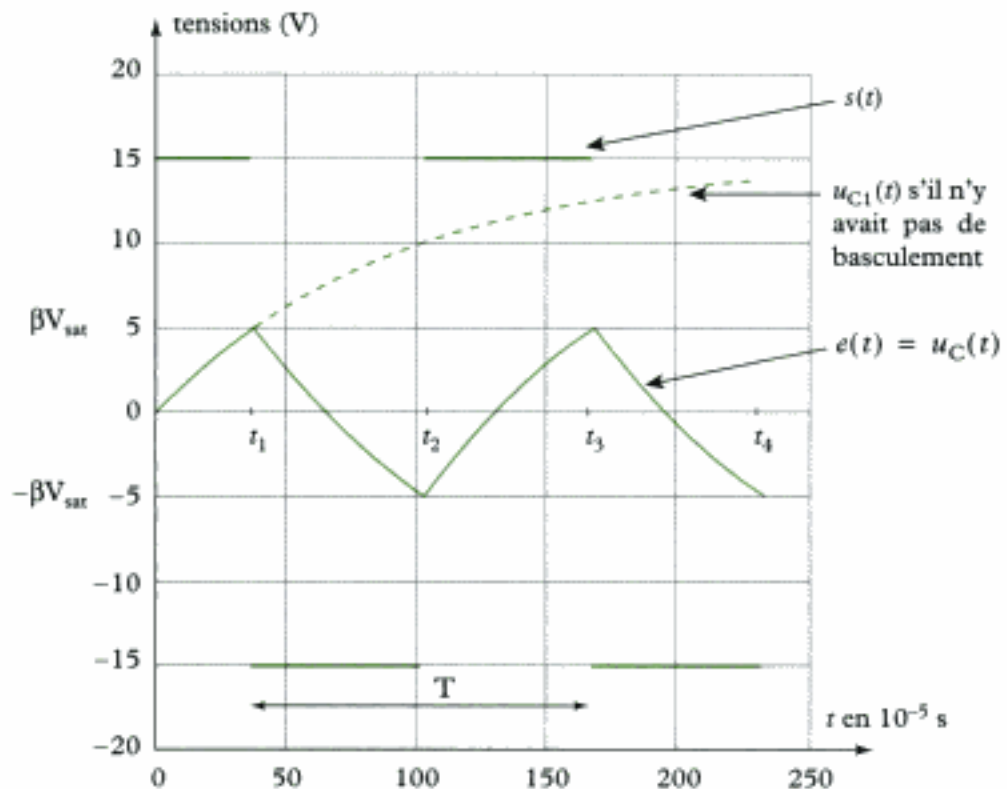


Fig. 23 - Chronogrammes de $u_C(t)$ et de $s(t)$, obtenus avec $R = 47$ k Ω , $C = 20$ nF, $R_1 = 5$ k Ω , $R_2 = 10$ k Ω et $V_{\text{sat}} = 15$ V. On a donc $\beta = \frac{1}{3}$.

Hidden page

Hidden page

1. À la différence de la figure 23 dans laquelle les branches associées à $e(t)$ sont des arcs d'exponentielles.

En prenant par exemple $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, on obtient le chronogramme de la figure 24 dans lequel les branches associées à la tension $e(t)$ sont quasi-droites¹ et représentent bien l'intégration, au sens mathématique du terme, de la tension d'entrée $\pm V_{\text{sat}}$.

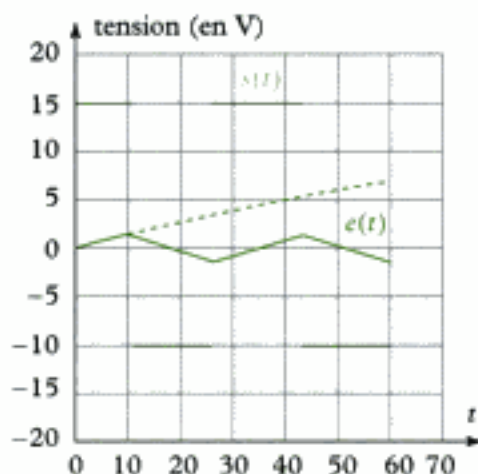


Fig. 24 - Fonctionnement en intégrateur vrai.

Dans ce cas, $\beta \ll 1$; en développant au premier ordre $T = 2RC \ln \left[\frac{1+\beta}{1-\beta} \right]$, on obtient :

$$T = 4\beta RC.$$

Le multivibrateur à pseudo-intégrateur permet donc d'obtenir une tension rectangulaire et une tension triangulaire dans son domaine d'intégration vraie, de période :

$$T = 2RC \ln \left[\frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \approx 4\beta RC, \text{ avec } \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

D.5. Rapport cyclique et contrôle de la fréquence

Définition 4

Le **rapport cyclique** α du signal rectangulaire est le rapport de la durée passée à l'état haut pendant une période du signal sur la durée de cette période.

Exemple : dans le cas de la figure 24 nous avons $\alpha = \frac{1}{2}$.

Pour faire varier la fréquence, il suffit de modifier :

– la constante de temps RC en remplaçant R par un potentiomètre ou C par un condensateur ajustable ;

– le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ en plaçant des potentiomètres en R_1 et R_2 ² ; on change ainsi la valeur des seuils du comparateur à hystérésis.

Cependant, il est préférable de ne pas modifier le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ pour faire varier la fréquence. Celle-ci sera donc ajustée à l'aide de R ou de C , ou des deux.

• Contrôle du rapport cyclique

Pour modifier le rapport cyclique et le déplacer de sa valeur, il suffit que le régime de décharge de la phase 2 ne soit pas symétrique de celui de la charge de la phase 3. Pour cela, il faut que les constantes de temps de ces deux régimes (décharge, charge) ne soient pas les mêmes.

2. Ou un seul potentiomètre agissant simultanément sur R_1 et R_2 .

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Hidden page

E.4. Contrôle de la fréquence et du rapport cyclique

Avec la même analyse qu'au paragraphe D.5, en agissant sur la valeur de la capacité C , en rendant par exemple cette capacité ajustable, on peut régler la période et la fréquence des signaux.

Pour ce qui est du rapport cyclique, comme en D.5, on aboutit à la même solution avec l'utilisation de deux diodes aiguillant différemment le courant i .

Nous obtenons le circuit suivant (fig. 31) :

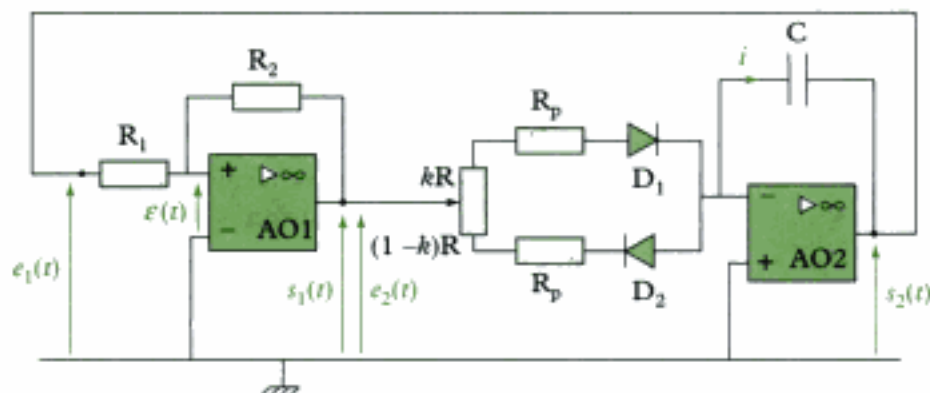


Fig. 31 - Contrôle du rapport cyclique d'un multivibrateur à intégrateur à amplificateur opérationnel.

Les constantes de temps sont $\tau_1 = (R_p + kR)C$ et $\tau_2 = (R_p + (1-k)R)C$ qui règlent les durées :

$$\Delta t_1 = 2 \frac{R_1}{R_2} \tau_1 = 2 \frac{R_1}{R_2} (R_p + kR)C \text{ et } \Delta t_2 = 2 \frac{R_1}{R_2} \tau_2 = 2 \frac{R_1}{R_2} (R_p + (1-k)R)C.$$

La période est donc :

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2, \text{ soit : } T = 2 \frac{R_1}{R_2} (2R_p + R)C$$

$$\text{Le rapport cyclique est : } \alpha = \frac{\Delta t_2}{T} = \frac{2 \frac{R_1}{R_2} (R_p + (1-k)R)C}{2 \frac{R_1}{R_2} (2R_p + R)C}, \text{ soit :}$$

$$\alpha = \frac{R_p + (1-k)R}{(2R_p + R)}$$

Là aussi, l'ajustement du rapport cyclique peut se faire en réglant le paramètre k , c'est-à-dire en réglant le potentiomètre de résistance totale R .

F. Génération de signaux sinusoïdaux par filtrage

1. Les amplitudes des harmoniques d'une tension triangle décroissant beaucoup plus vite que celles d'une tension carrée, il est préférable de filtrer la tension triangle.

Le générateur de signaux précédent peut aussi fournir un signal sinusoïdal par filtrage de la tension triangle par exemple¹. Le filtre en question peut être du premier ordre, ou mieux encore du deuxième ordre si l'on veut améliorer la sélectivité, comme vu au chapitre sur le filtrage.

Nous choisissons de montrer que l'action d'un filtre du premier ordre sur un signal triangle est suffisante pour obtenir un signal sinusoïdal de qualité et nous laissons au lecteur expérimentateur le soin d'ajuster un filtre passe-bande plus sélectif.

La représentation temporelle du signal triangle $s_2(t)$ est donnée sur la figure 32 et son spectre en figure 33.

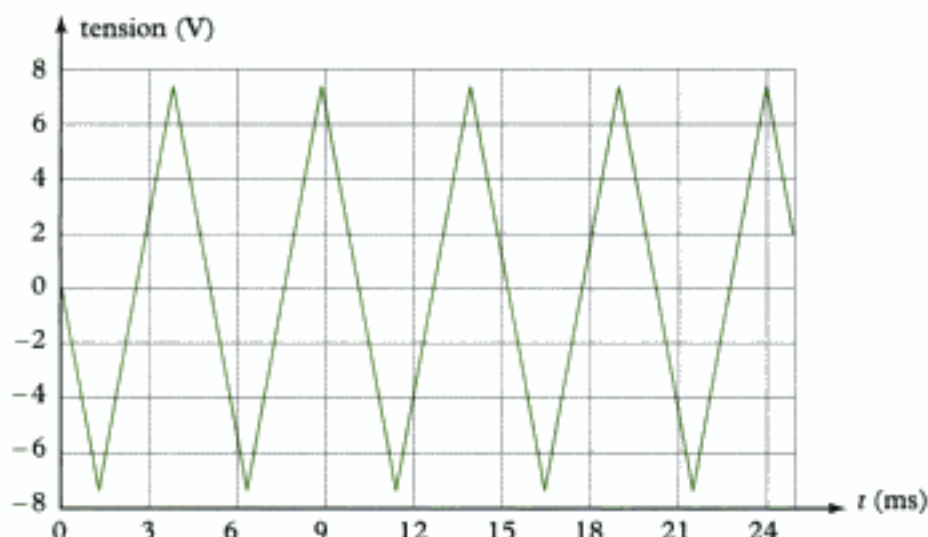


Fig. 32 - Signal triangle $s_2(t)$.

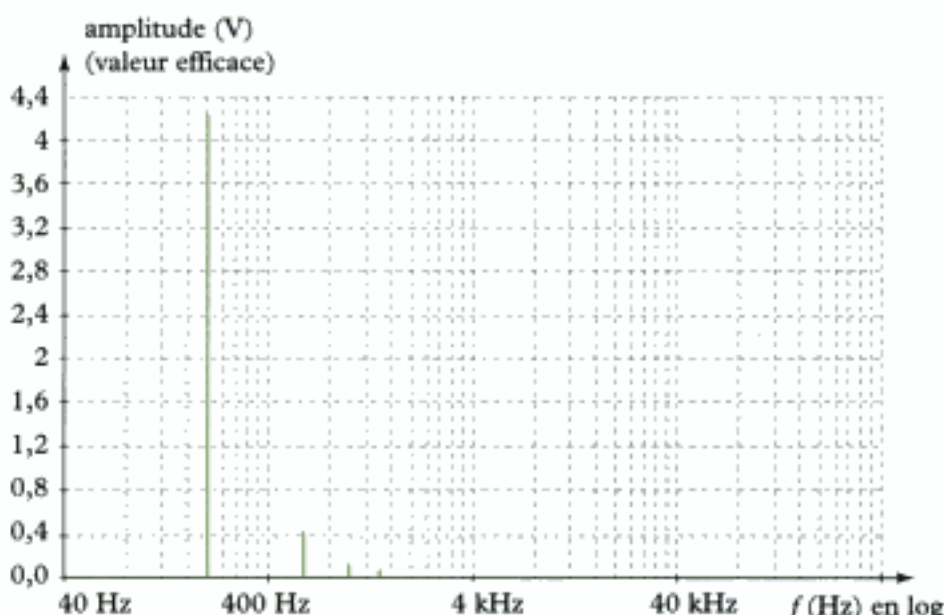


Fig. 33 - Spectre du signal triangle $s_2(t)$.

Les harmoniques principaux sont présents à 200 Hz, 600 Hz, 1 000 Hz et 1 400 Hz d'amplitude (efficace) en accord avec la décomposition en série de Fourier¹. Pour obtenir un signal sinusoïdal de fréquence 200 Hz, nous cherchons à éliminer les harmoniques de composante supérieure à 200 Hz.

Réalisons pour cela un filtre RC passe-bas du premier ordre dont la fréquence de coupure est 300 Hz.

Nous utilisons pour cela une capacité C_F de valeur 51 nF, la résistance à mettre en série est donc :

$$R_F = \frac{1}{2\pi f C_F} = \frac{1}{2\pi \times 300 \times 51 \cdot 10^{-9}} \approx 10 \text{ k}\Omega.$$

¹. Attention : le signal triangulaire est ici impair. La décomposition ne contiendra que des fonctions sinus.

Le montage est alors celui de la figure 34 :

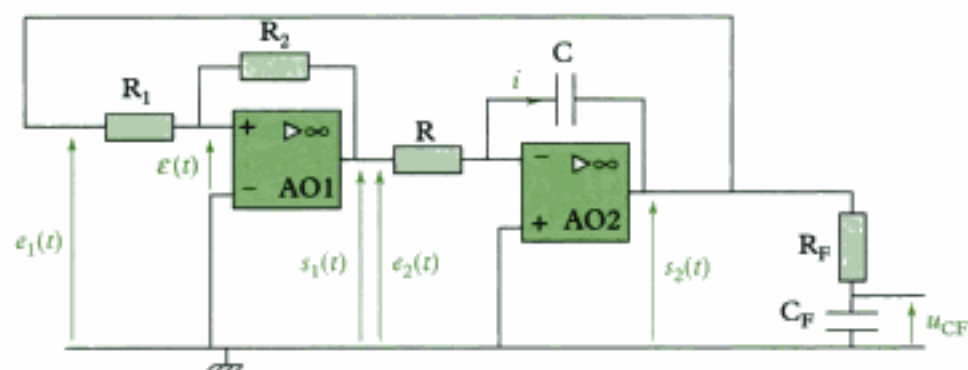


Fig. 34 - Obtention d'un signal sinusoïdal par filtrage.

Le signal u_{CF} recueilli et son spectre sont donnés en figures 35 et 36.

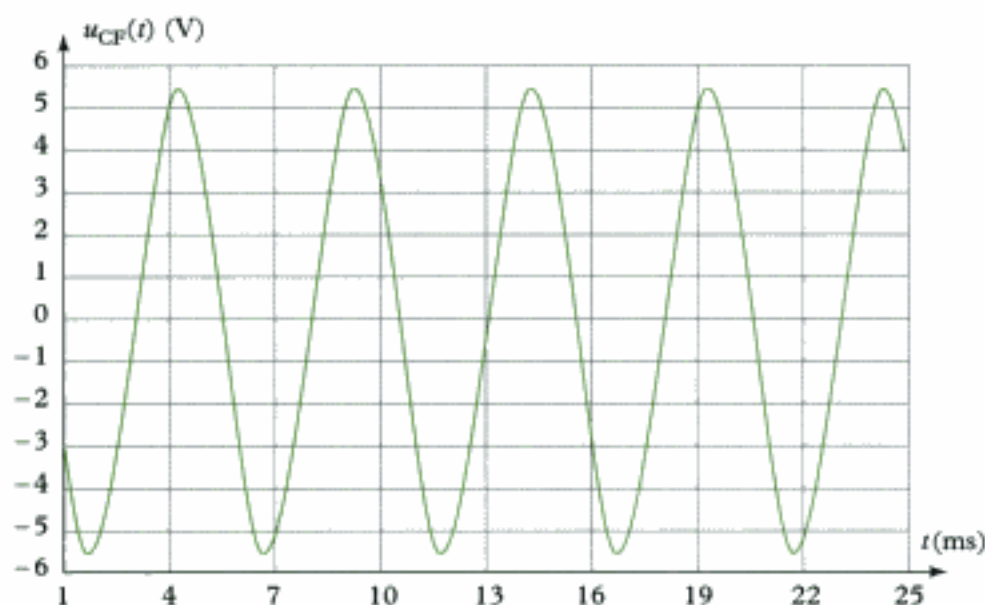


Fig. 35 - Signal sinusoïdal obtenu par filtrage aux bornes du condensateur

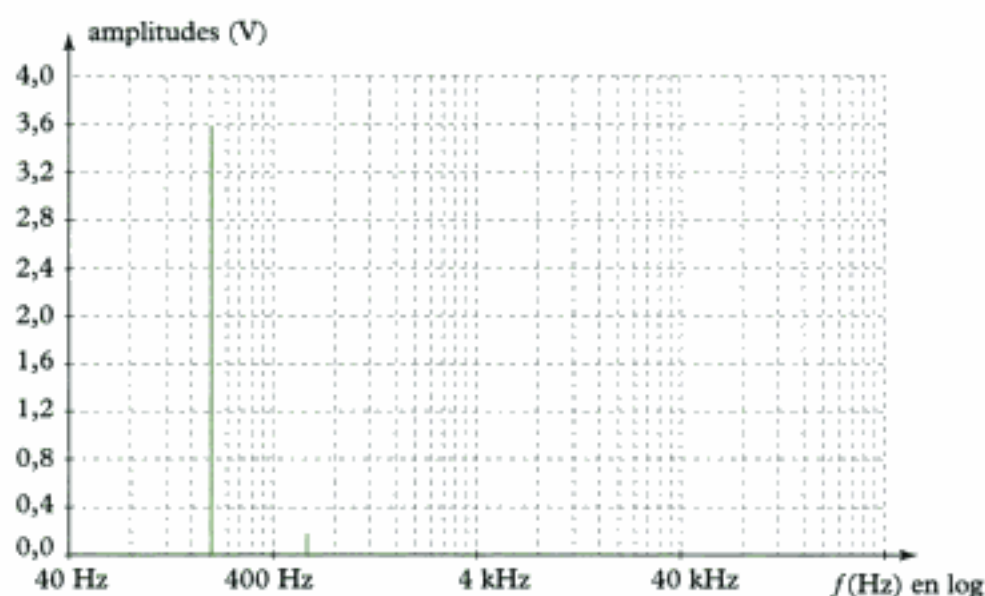


Fig. 36 - Spectre du signal u_{CF} obtenu par filtrage.

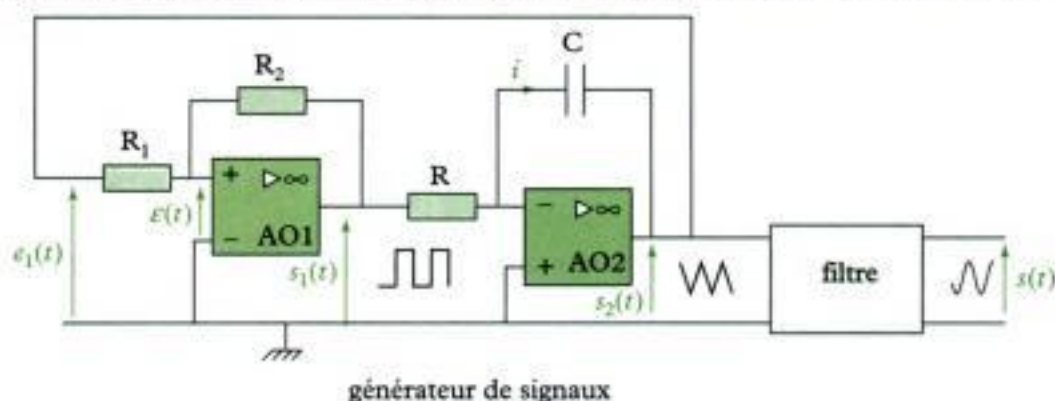
Hidden page

Hidden page

Hidden page

✓ Génération de signaux sinusoïdaux par filtrage

Dans ce cas de figure, nous filtrons la tension triangle et nous utilisons les résultats de l'analyse harmonique et du chapitre filtrage pour choisir un montage et ajuster ses paramètres.



Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment trouver l'allure de la tension de sortie d'un comparateur à hystérésis ?

Le schéma d'un comparateur à hystérésis étant donné, ainsi que la tension d'entrée, donner l'allure de la tension de sortie.

→ Savoir faire

- ① En considérant le type de rétroaction, vérifier que l'amplificateur opérationnel fonctionne bien en régime saturé. Dans le cas contraire, il ne s'agit pas d'un comparateur à hystérésis.
- ② Reconnaître sur le montage si le comparateur à hystérésis est inverseur ou non inverseur.
- ③ Chercher quelle est la tension de référence.
- ④ Déterminer les tensions e^+ et e^- en fonction des données du problème.
- ⑤ La sortie s étant à l'état $\pm V_{\text{sat}}$, faire une première hypothèse sur cet état de sortie et choisir l'état $s = +V_{\text{sat}}$ ou $s = -V_{\text{sat}}$ pour la suite.
- ⑥ En tirer la condition sur la tension différentielle correspondante :

$$e > 0 \text{ ou } e < 0.$$
- ⑦ En supposant l'état de e (> 0 ou < 0) établi dans le temps, examiner les conséquences sur la tension d'entrée $e(t)$ de la proposition « Tant que e garde cet état... »
- ⑧ Situer cette tension d'entrée par rapport aux seuils e_B et e_H du comparateur à hystérésis.
- ⑨ L'état de la sortie perdurera tant que la tension $e(t)$ n'aura pas atteint l'un des seuils e_B ou e_H . Le basculement de la sortie se produit à ce moment.
 Nous possédons maintenant l'état des signaux pour une évolution de la sortie entre l'état que nous avons choisi au départ et son opposé.
- ⑩ Par la suite, pour trouver l'état des signaux entre l'état opposé et l'état de départ, il suffit de reprendre le raisonnement à l'étape 5 avec la nouvelle hypothèse sur la tension de sortie.
- ⑪ Tracer l'allure du signal de sortie en fonction du signal d'entrée.

→ Application : Trigger de Schmitt

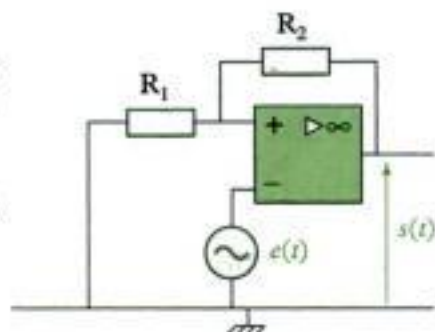
Le circuit de la figure ci-contre comprend deux résistances R_1 et R_2 ainsi qu'un amplificateur opérationnel idéal. La tension $e(t)$ est sinusoïdale.

Donner l'allure de la tension de sortie.

Oral, Mines Sup 1999

Solution

Nous posons $e = E_m \sin(\omega t)$ comme le suggère l'énoncé.



① L'analyse du circuit montre que l'amplificateur opérationnel est seulement en réaction positive (pas de rétroaction). Cet amplificateur fonctionne alors en dehors du régime linéaire, donc en régime saturé. La sortie s est de ce fait à l'état $+V_{\text{sat}}$ ou $-V_{\text{sat}}$.

② Nous reconnaissons un comparateur à hystérésis inverseur à amplificateur intégré.

③ $e_{\text{ref}} = 0$.

④ On exprime $e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$ par un diviseur de tension.

⑤ Première hypothèse : $s = +V_{\text{sat}}$.

⑥ Alors : $e > 0$. On a donc :

$$e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = e_H.$$

⑦ Tant que : $e = e^+ - e^- > 0$, c'est-à-dire tant que :

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} - e > 0, \text{ soit : } e < \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}, \text{ alors : } s = +V_{\text{sat}}.$$

⑧ On a donc $e < e_H$.

⑨ Quand e atteint la valeur e_H , par tension croissante, il y a basculement de la sortie s de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$.

⑩ et ⑤ Deuxième hypothèse : $s = -V_{\text{sat}}$.

⑥ Alors : $e < 0$. On a donc :

$$e^+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = e_B.$$

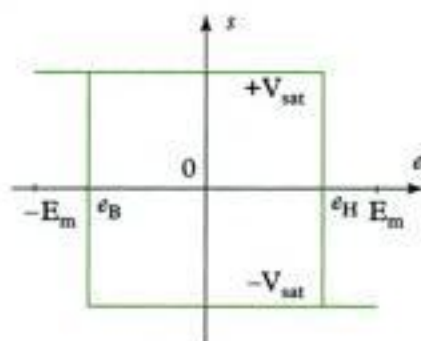
⑦ Tant que : $e = e^+ - e^- < 0$, c'est-à-dire tant que :

$$\text{soit } -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} - e < 0, \text{ soit : } e > -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}}, \text{ alors : } s = -V_{\text{sat}}.$$

⑧ On a donc $e > e_B$.

⑨ Quand e atteint la valeur e_B , par valeur décroissante, il y a basculement de la sortie s de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$.

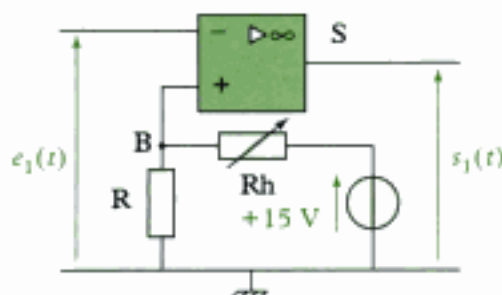
⑩ Si la tension $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ vérifie $E_m > e_H$ et $E_m > |e_B|$, alors il y a basculement de la sortie et on observe le cycle d'hystérésis :



Exercices

Niveau 1

Ex. 1 Signal crête de durée haute réglable



L'amplificateur opérationnel utilisé dans ce montage a une tension de saturation $\pm V_{\text{sat}} = \pm 15 \text{ V}$. L'entrée $e_1(t)$ est alimentée par une horloge dont le signal de sortie est triangulaire, de période $T = 20 \text{ ms}$. L'amplitude du signal d'entrée est 15 V et à $t = 0 \text{ s}$, $e_1(t) = +15 \text{ V}$.

1) Quels états peut-on prévoir pour $s_1(t)$? Le fonctionnement du montage est-il linéaire ou non linéaire? Quel est l'état de $s_1(t)$ à $t = 0 \text{ s}$? Pour quelle condition sur $e_1(t)$ cet état changera-t-il?

2) Donner l'allure des chronogrammes de $e_1(t)$ et $s_1(t)$.

3) On appelle t_H , pendant une période T de $e_1(t)$, la durée pendant laquelle la tension $s_1(t) = -15 \text{ V}$. Montrer que :

$$\frac{t_H}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_h}{R_h + R} \right).$$

4) R ayant une valeur donnée, exprimer R_h pour avoir $\frac{t_H}{T} = k$.

Donnée : $R = 10 \text{ k}\Omega$.

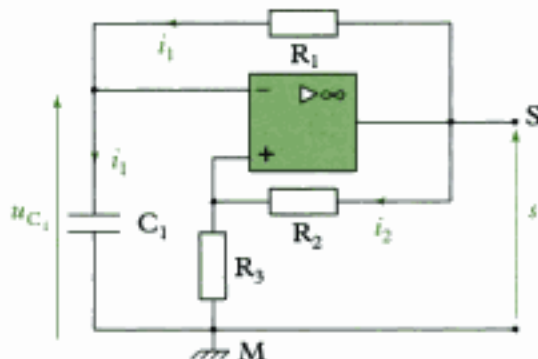
Calculer la valeur de R_h pour avoir $k = 0,1$.

5) Dans ce cas, représenter le chronogramme de $s_1(t)$.

Ex. 2 Limiteur d'amplitude

Dans le montage suivant, l'amplificateur opérationnel est supposé parfait et alimenté sous une tension $\pm V_{\text{sat}} = \pm 15 \text{ V}$. Les diodes sont considérées idéales.

Données : $R_1 = 33 \text{ k}\Omega$; $R_2 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$.



1) Tracer la caractéristique du comparateur à hystérésis pour une tension d'entrée $e(t)$ variant de -10 V à $+10 \text{ V}$ en indiquant le sens de parcours.

2) Dans le cas du multivibrateur, quel est parmi les chronogrammes suivants, donnant simultanément $s(t)$ et $u_{C1}(t)$, celui qui correspond au montage ?

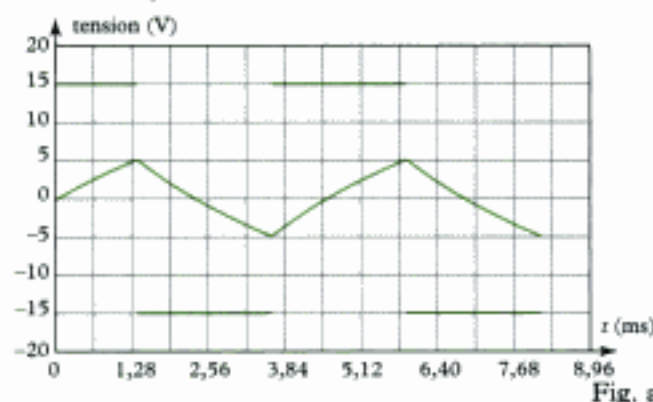


Fig. a

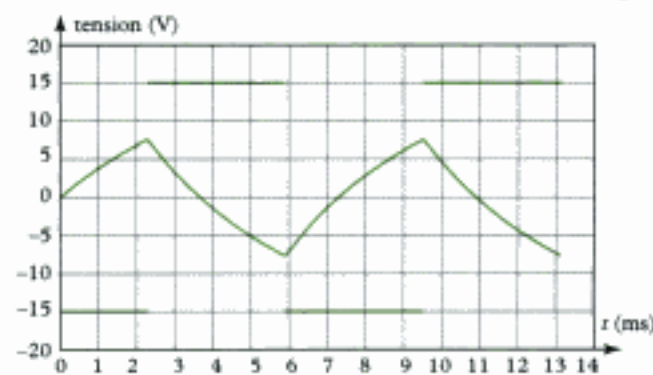


Fig. b

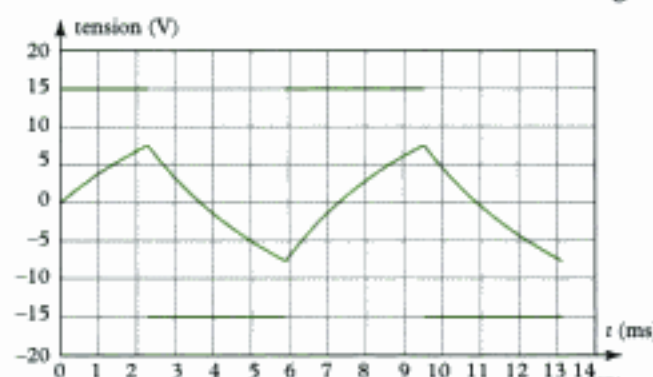
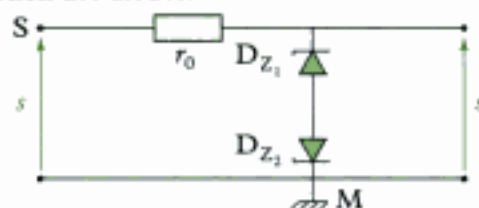


Fig. c

3) On raccorde à la sortie du multivibrateur le circuit suivant à diodes Zener supposées identiques, de tension de Zener $U_Z = 10 \text{ V}$. r_0 est une résistance de protection des diodes.

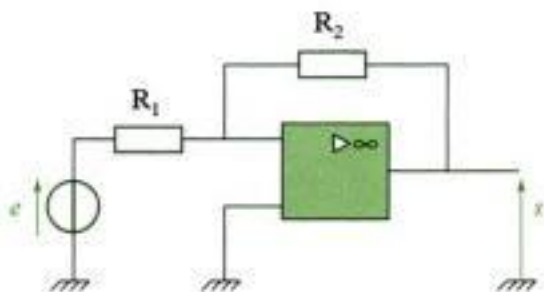


Représenter le chronogramme de $s_L(t)$. En déduire la valeur de C_1 .

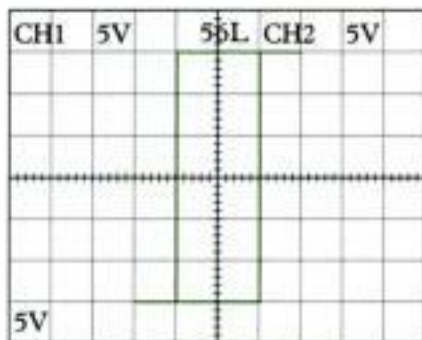
Niveau 2

Ex. 3 Oscillateur à comparateur à hystérésis

Soit le circuit suivant :



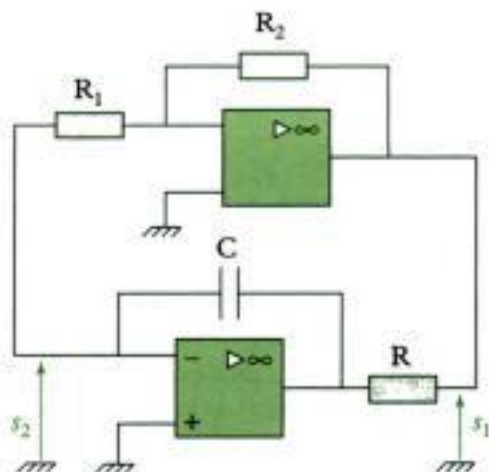
On relève la caractéristique de transfert $s(e)$ du montage et on obtient :



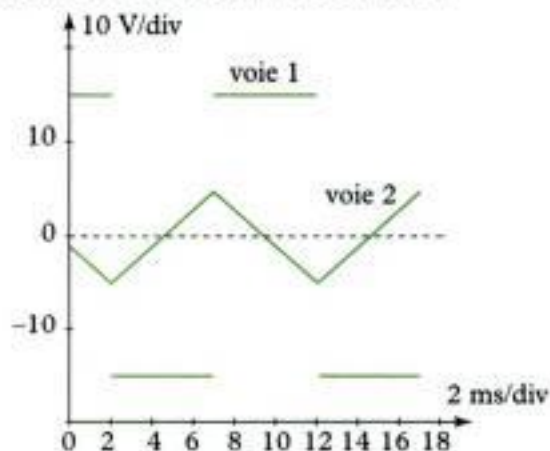
- 1) Quel est le mode de fonctionnement du montage ci-dessus ?
- 2) Quel est le type de tension délivrée par le générateur ?
- 3) Indiquer sur le schéma les bornes de l'amplificateur opérationnel.
- 4) Quelle est la tension de saturation ?
- 5) Calculer le rapport :

$$\frac{R_1}{R_2}$$

- 6) On enlève le générateur et on forme le circuit suivant :



On donne les chronogrammes suivants :



Que représentent les voies 1 et 2 ?

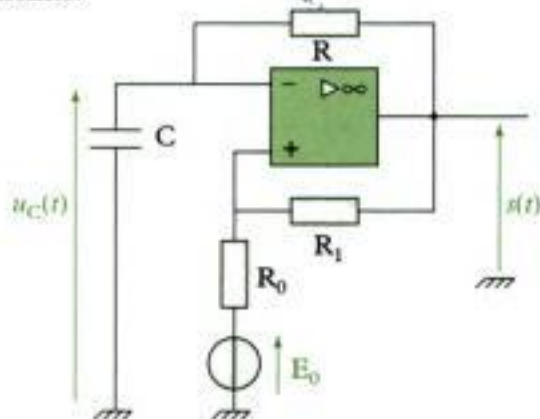
Exprimer la demi-période du signal en fonction de R_1 , R_2 et $\tau = RC$.

Mesurer cette demi-période et en déduire la valeur de τ .

Oral, CCP 2002, option PSI

Ex. 4 Saturation d'un amplificateur opérationnel à réaction négative

Dans le montage suivant, l'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal et E_0 est une tension constante.



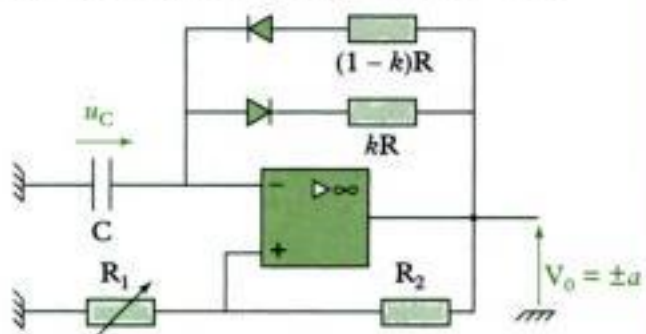
- 1) Montrer que le montage proposé conduit à une saturation de l'amplificateur opérationnel.

- 2) En déduire l'allure des tensions $s(t)$ et $u_C(t)$.

Oral, Mines, CCP

Ex. 5 Astable à paramètres modifiables

Dans le montage ci-dessous, l'amplificateur opérationnel est idéal. À $t = 0$, $V_0 = +a$ et $u_C = 0$ V.



1) Tracer l'évolution de u_C au cours du temps sachant que $R = R_2 = 1 \text{ M}\Omega$, $0 < k < 1$, $C = 1 \text{ nF}$ et $R_1 = 2R_2$. On prendra $k = 0,2$ et $a = 12 \text{ V}$.

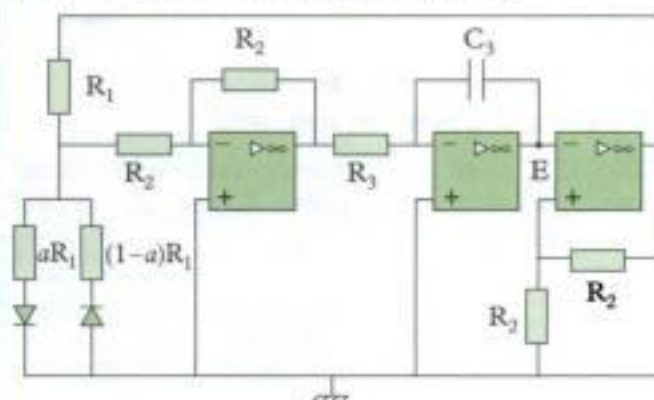
2) Quelle est l'influence de k et R_1 ? On considérera le cas des diodes idéales et celui des diodes réelles (tension de seuil u_s).

Oral, Centrale-Supélec, 2003, PC

Niveau 3

Ex. 6 Astable à comparateur à hystérésis inverseur

On suppose les diodes idéales et a est un paramètre fixé. Les trois amplificateurs sont idéaux ; les deux premiers fonctionnent en régime linéaire.



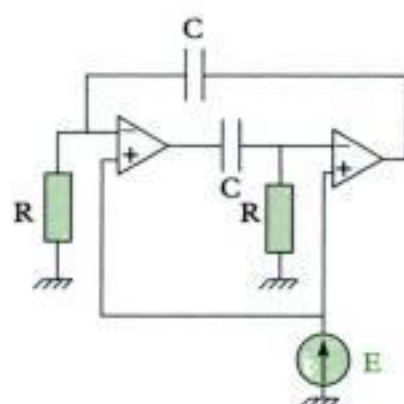
1) Décrire l'évolution du circuit et établir la loi d'évolution de $V_E(t)$.

2) Montrer qu'elle est périodique et déterminer T .

Oral, Polytechnique, 2001, PC

Ex. 7 Oscillateur commandé par une tension

Les deux amplificateurs opérationnels sont idéaux et fonctionnent en régime de saturation. Les condensateurs sont initialement déchargés.



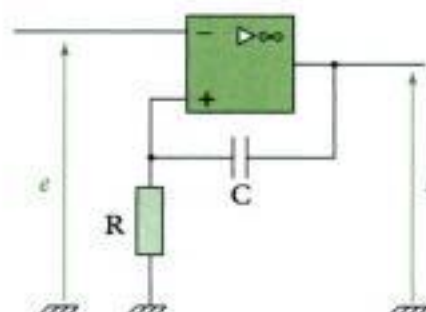
1) En supposant que $0 < E < V_{\text{sat}}$, montrer que le circuit proposé constitue un oscillateur et calculer sa période T .

2) Données :

$R = 47 \text{ k}\Omega$; $C = 10 \text{ nF}$; $E = 2,5 \text{ V}$ et $V_{\text{sat}} = 14 \text{ V}$. Tracer les courbes donnant l'évolution des tensions sur les bornes d'entrées inverseuses des deux amplificateurs opérationnels.

Oral, CCP, 2000, PSI

Ex. 8 Monostable



Données :

$i^+ = i^- = 0$; $s = +V_{\text{sat}}$ ou $-V_{\text{sat}}$; $V_{\text{sat}} = +15 \text{ V}$; $e = -5 \text{ V}$ si $t \leq t_0$.

À $t = t_0$, la tension e devient positive pendant un court instant.

Expliquer le fonctionnement de ce monostable.

Oral, CCP, 1998, PSI

Indications

Ex. 3 En premier, exploiter complètement le chronogramme.

Ex. 4 L'évolution temporelle d'un signal peut aussi être décrite par une équation différentielle (cf. chapitre 6).

Ex. 5 Faire une hypothèse sur l'état de la sortie et raisonner par phases successives.

Ex. 6 Reconnaître tout d'abord les blocs constituant le montage puis faire une hypothèse sur l'état de la sortie d'un amplificateur opérationnel fonctionnant en mode non linéaire et raisonner ensuite par phases successives.

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

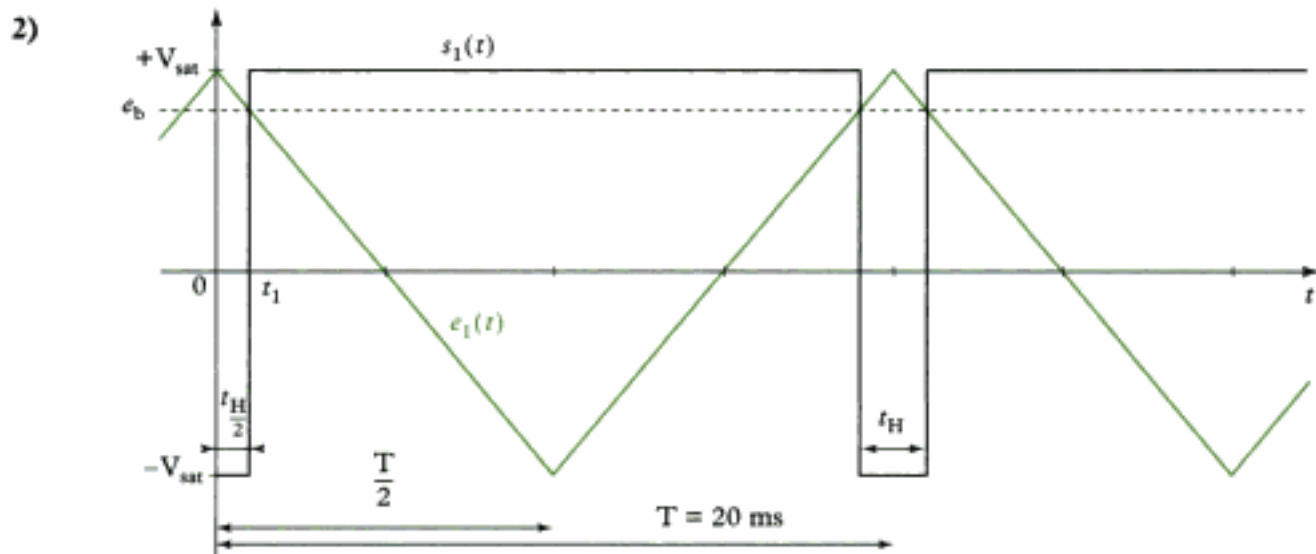
1) L'amplificateur, qui ne possède pas de réaction, fonctionne donc en **régime non linéaire**.

$$e^+ = \frac{R}{R + R_h} V_{\text{sat}}, \text{ et donc : } e^+ < V_{\text{sat}}.$$

Si $e_1(t=0) = 15 \text{ V}$, alors : $\varepsilon = e^+ - e^- < 0$, donc : $s_1(t) = -V_{\text{sat}}$.

Cet état changera lorsque $e_1(t)$ atteindra la valeur :

$$e_b = \left(\frac{R}{R + R_h} \right) V_{\text{sat}}.$$



3) La tension $e_1(t)$ évolue selon $e_1(t) = at + b$, entre $t = 0$ et $t = \frac{T}{2}$, avec :

$$e_1(t=0) = b = 15 \text{ et } e_1\left(\frac{T}{2}\right) = a\frac{T}{2} + 15 = -15, \text{ donc } a = -\frac{60}{T}.$$

Ainsi : $e_1(t) = -\frac{60}{T}t + 15$ si $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$.

On en déduit que la date du premier basculement est telle que :

$$-\frac{60}{T}t_1 + 15 = 15 \frac{R}{R + R_h} \Rightarrow t_1 = -\frac{T}{60} \times 15 \times \left(\frac{R}{R + R_h} - 1 \right), \text{ donc : } t_1 = \frac{T}{4} \left(\frac{R_h}{R + R_h} \right).$$

Or, durant une période, et par raison de symétrie :

$$t_H = 2t_1 = \frac{T}{2} \left(\frac{R_h}{R + R_h} \right) \Leftrightarrow \frac{t_H}{T} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_h}{R + R_h} \right)$$

4) $\frac{t_H}{T} = k$, donc $2k = \frac{R_h}{R + R_h} \Leftrightarrow 2kR + 2kR_h = R_h$

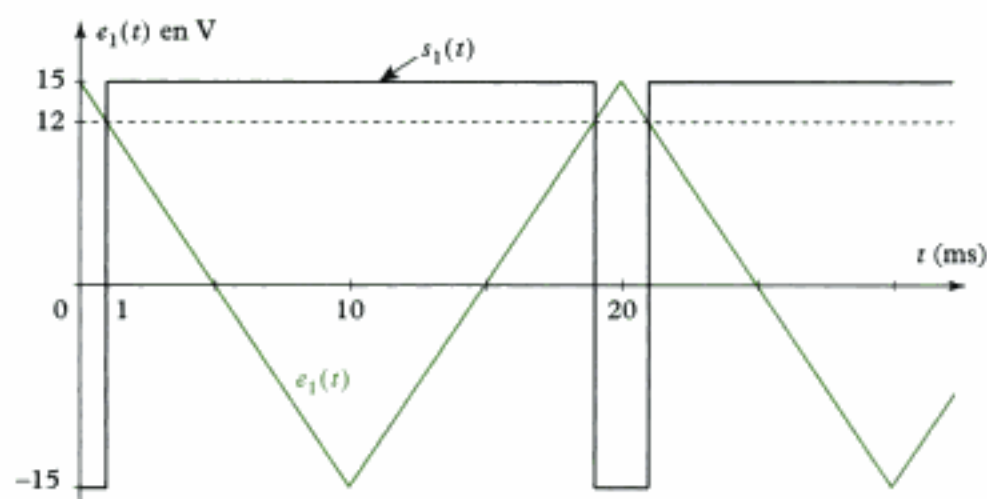
$$\Leftrightarrow R_h(2k - 1) = -2kR \Leftrightarrow R_h = \frac{2kR}{1 - 2k}$$

A.N. $k = 0,1$ et $R = 10 \text{ k}\Omega \Rightarrow R_h = \frac{2 \times 0,1 \times 10^4}{1 - 2 \times 0,1} = 2500 \Omega = 2,5 \text{ k}\Omega$.

5) On a alors : $e_b = \frac{10^4}{(10^4 + 2,5 \cdot 10^3)} \times 15 = 12 \text{ V}$

et $t_1 = \frac{T}{4} \left(\frac{R_h}{R + R_h} \right) = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{4} \left(\frac{2,5 \cdot 10^3}{10^4 + 2,5 \cdot 10^3} \right) = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$.

On obtient donc le chronogramme suivant :



Exercice 2

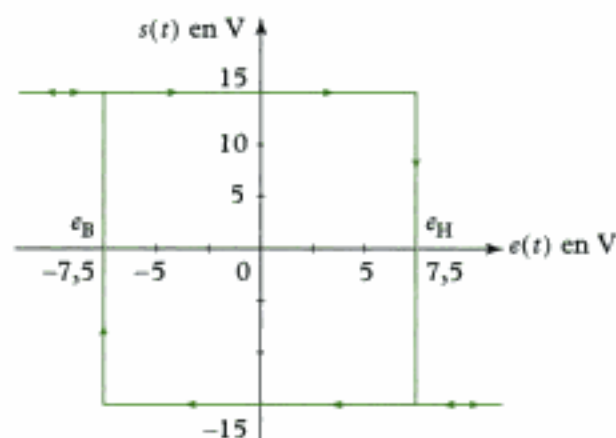
1) On reconnaît un comparateur à **hystérésis inverseur** pour lequel nous savons que :

$$e_H = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat} \quad \text{et} \quad e_B = -\frac{R_3}{R_2 + R_3} V_{sat} \quad (\text{cf. cours}).$$

Ce qui donne :

$$e_H = +7,5 \text{ V} \quad \text{et} \quad e_B = -7,5 \text{ V}.$$

On obtient alors le cycle d'hystérésis suivant.



2) – Dans le cas de la figure a, le basculement de la sortie ne se produit pas à $\pm 7,5 \text{ V}$. **Ce cas doit être écarté.**

– Dans le cas de la figure b, le basculement se produit bien à $\pm 7,5 \text{ V}$. Cependant, la tension de basculement et la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel sont de signes opposés, **ce qui est impossible.**

– Dans le cas de la figure c, la tension de basculement ainsi que la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel sont conformes à ce qui est attendu. **Le cas de la figure c est celui qui correspond au montage et aux paramètres indiqués.**

Hidden page

4) La tension de saturation est lue sur le chronogramme :

$$V_{\text{sat}} = s_{\text{max}} = 15 \text{ V}$$

5) Le montage est celui d'un comparateur à hystérésis non inverseur avec $e_{\text{ref}} = 0$. Nous savons que les seuils de basculement sont :

$$e_H = +\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}} \text{ et } e_B = -\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}},$$

avec $e_H = 5 \text{ V}$ et $e_B = -5 \text{ V}$ lus sur la caractéristique de transfert $s(e)$. On en déduit :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{e_H}{V_{\text{sat}}} = \frac{5}{15}, \text{ soit : } \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{3}$$

6) Nous reconnaissons un **multivibrateur à intégrateur** comprenant un amplificateur opérationnel. $s_1(t)$ est le signal prélevé à la sortie du comparateur à hystérésis, donc un signal provenant d'un montage non linéaire. **Le chronogramme de la voie 1 est donc celui qui correspond à $s_1(t)$.**

$s_2(t)$ est le signal prélevé à la sortie de l'intégrateur qui fonctionne en mode linéaire. L'intégration du signal carré donne un signal triangulaire. **La voie 2 correspond donc au signal $s_2(t)$.**

D'après les résultats du cours :

$$T = 4\frac{R_1}{R_2}RC, \text{ donc : } T_{1/2} = 2\frac{R_1}{R_2}RC = 2\frac{R_1}{R_2}\tau.$$

On mesure sur le chronogramme : $T_{1/2} = 5 \text{ ms}$. D'où :

$$\tau = T_{1/2}\frac{R_2}{2R_1} \quad \text{A. N. : } \tau = 5 \cdot 10^{-3} \times \frac{3}{2} = 7,5 \text{ ms.}$$

Exercice 4

1) Nous supposons que le montage fonctionne en régime linéaire. On a donc : $e^- = e^+ = u_C$.

Le théorème de Millman permet d'exprimer e^+ :

$$e^+ = \frac{\frac{E_0}{R_0} + \frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 E_0 + R_0 s}{R_0 + R_1} \quad (1)$$

De plus :

$$s = Ri + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = RC \frac{de^+}{dt} + e^+ \quad (2)$$

En regroupant (1) et (2) on obtient :

$$s = \frac{RCR_0}{(R_0 + R_1)} \frac{ds}{dt} + \frac{R_1 E_0}{R_0 + R_1} + \frac{R_0 s}{R_0 + R_1}, \text{ soit en simplifiant : } RC \frac{ds}{dt} - \frac{R_1}{R_0} s = -\frac{R_1}{R_0} E_0.$$

La solution de l'équation sans second membre $RC \frac{ds}{dt} - \frac{R_1}{R_0} s = 0$ est du type :

$$s = A \exp\left(\frac{t}{\tau}\right), \text{ avec } \tau = \frac{R_0 RC}{R_1} > 0$$

Elle est donc divergente lorsque t augmente. Ceci conduit le montage à **saturation en sortie de l'amplificateur opérationnel**.

2) Supposons que l'amplificateur opérationnel sature à $+V_{\text{sat}}$ en sortie.

On a donc :

$$s = +V_{\text{sat}} \text{ et } \varepsilon = e^+ - e^- > 0.$$

On suppose aussi que :

$$u_C(t=0) = 0 \text{ V.}$$

Si le régime pouvait évoluer jusqu'à $t \rightarrow \infty$, on aurait :

$$u_C(t \rightarrow \infty) = +V_{\text{sat}} = e^-.$$

Le seuil de basculement est déterminé, si $s = +V_{\text{sat}}$, par :

$$e^+ = E_0 + R_0 i',$$

avec i' donné par :

$$s - R_1 i' - R_0 i' - E_0 = 0, \text{ soit : } i' = \frac{s - E_0}{R_0 + R_1}.$$

On obtient donc :

$$e^+ = \frac{R_1 E_0 + R_0 s}{R_1 + R_0} = \frac{R_1 E_0 + R_0 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_0}.$$

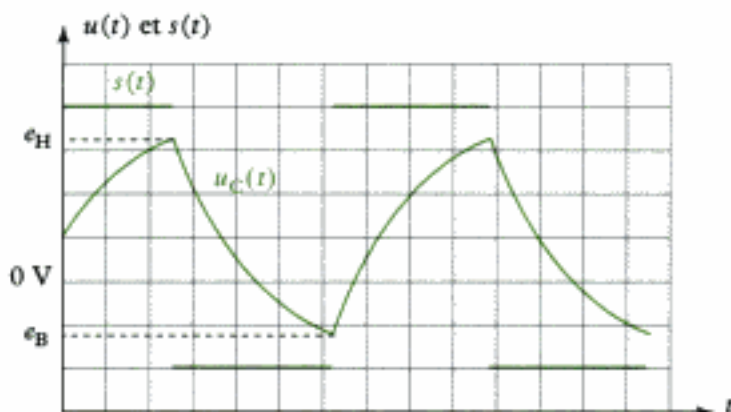
À la condition que $E_0 < V_{\text{sat}}$, on a : $e^+ < V_{\text{sat}}$ (que l'on vérifie en posant $e^+ < V_{\text{sat}}$ et en développant).

Il existe donc un seuil de basculement qui va rencontrer $u_C(t) = e^-(t)$ au cours de son évolution.

Dès lors : $s = -V_{\text{sat}}$ et le condensateur se décharge jusqu'à rencontrer le nouveau seuil :

$$e^+ = \frac{R_1 E_0 - R_0 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_0}.$$

Nous pouvons donc prévoir l'évolution suivante pour $u_C(t)$ et $s(t)$ en régime établi :



Exercice 5

1) • Première phase

Si $V_0 = +a$, la diode de la branche contenant la résistance $(1-k)R$ est passante. Le condensateur se charge. On obtient donc :

$$u_C(t) = a \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{(1-k)RC}\right) \right]$$

puisque $\tau = (1-k)RC$ est la constante de temps de ce circuit et que l'équation différentielle est :

$$a = (1-k)RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

La tension de sortie « a » est divisée par le pont formé par les résistances R_1 et R_2 de sorte que :

$$e^+ = R_1 \frac{a}{R_1 + R_2} = \beta a, \text{ avec } \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

La tension $u_C(t)$ croît donc (jusqu'à $+a$ si $t \rightarrow \infty$). Lors de cette évolution, la tension $u_C(t) = e^-(t)$ atteint la valeur $e^+ = \beta a$ et la sortie bascule. Ceci se passe à la date t_1 telle que :

$$a \left[1 - \exp\left(\frac{-t_1}{(1-k)RC}\right) \right] = \beta a, \text{ et donc : } t_1 = (1-k)RC \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)$$

À $t = t_1$, on a : $u_C(t_1) = \beta a$ (basculement).

• Deuxième phase

On a alors $V_0 = -a$; la diode de la branche contenant la résistance kR conduit.

L'équation différentielle est alors :

$$-a = kRC \frac{du_C}{dt} + u_C, \text{ de solution : } u_C = -a + \beta \exp\left(\frac{-(t-t_1)}{kRC}\right).$$

Soit, avec les conditions initiales sur $u_C(t_1)$ permettant de calculer β :

$$u_C = -a + a(1+\beta) \exp\left(\frac{-(t-t_1)}{kRC}\right).$$

Cette tension décroît depuis $u_C(t_1) = \beta a$.

À la date t_2 telle que $u_C(t) = e^+ = -\beta a$ qui est le nouveau seuil, la sortie bascule à $V_0 = +a$.

On obtient :

$$t_2 = kRC \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + (1-k)RC \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right)$$

À cette date : $u_C(t_2) = -\beta a$.

• Troisième phase

On a alors $V_0 = +a$. L'équation différentielle est :

$$a = (1-k)RC \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (1), \text{ avec } u_C(t_2) = -\beta a.$$

On obtient alors :

$$u_C(t) = +a - a(1+\beta) \exp\left(-\frac{t-t_2}{(1-k)RC}\right)$$

La tension $u_C(t)$ croît de nouveau.

À la date t_3 égale à :

$$kRC \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + (1-k)RC \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + (1-k)RC \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = RC \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + (1-k)RC \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right),$$

on a alors $u_C(t_3) = \beta a$.

Nous nous retrouvons dans les conditions de début de la première phase 1. Le signal est donc périodique de période $T = t_3 - t_1$, soit :

$$T = RC \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) + (1-k)RC \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right) - (1-k)RC \ln\left(\frac{1}{1-\beta}\right).$$

Donc :

$$T = RC \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

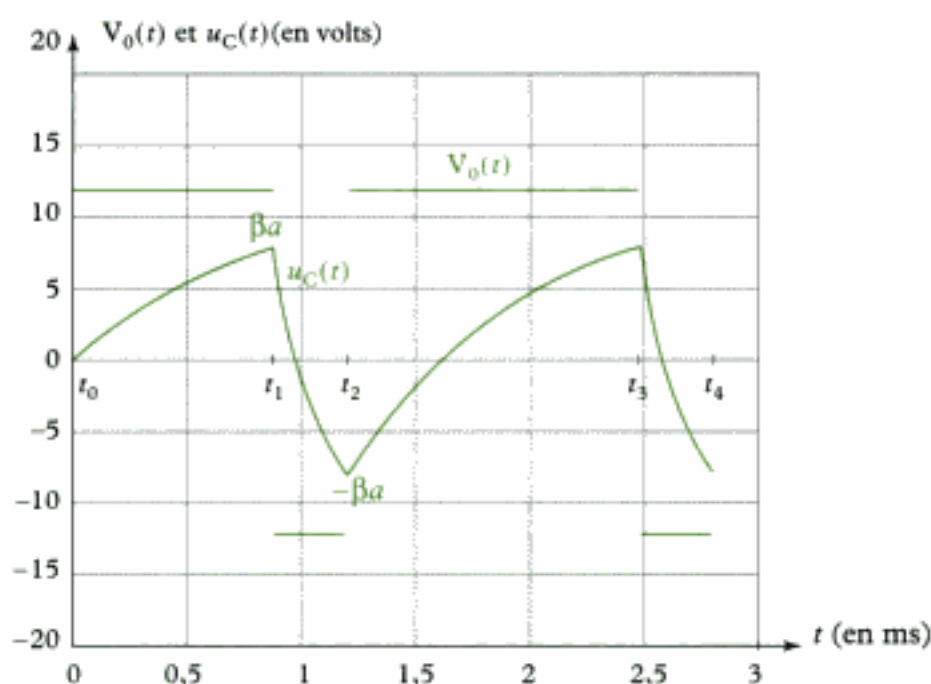
Avec les valeurs indiquées, on obtient :

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6 + 10^6} = \frac{2}{3}, \text{ donc : } \beta = \frac{2}{3}.$$

Les seuils se situent alors à $\pm \beta a = \pm 8 \text{ V}$ et on obtient :

$$t_1 \approx 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ s ; } t_2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ s ; } t_3 \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s ; } T = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ s, donc : } f = 620 \text{ Hz.}$$

D'où le tracé ci-dessous :



2) • Comme on le voit, **k n'a d'influence** ni sur la valeur du seuil ($\pm \beta a$) ni sur la valeur de la période

$$T = RC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right).$$

Par contre, **k** a une influence sur le rapport cyclique α .

$$\text{Ici : } \alpha = \frac{t_3 - t_2}{T} = \frac{RC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) + (1-k)RC \ln \left(\frac{1}{1-\beta} \right) - kRC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - (1-k)RC \ln \left(\frac{1}{1-\beta} \right)}{RC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)}$$

D'où :

$$\alpha = \frac{(1-k)RC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)}{RC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)} = 1 - k$$

Ainsi, **k influence directement le rapport cyclique du signal $V_0(t)$.**

• Pour ce qui est de R_1 , dont dépend $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, l'influence porte sur le seuil de basculement, et donc la **tension minimale et maximale** ($\pm \beta a$) atteinte par $u_C(t)$, ainsi que sur la **période** :

$$T = RC \ln \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right).$$

Exemple :

	β	α	βa (V)	T (ms)
$R_1 = 2 \text{ M}\Omega$ et $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$	0,66	0,8	8	1,6
$R_1 = 3 \text{ M}\Omega$ et $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$	0,75	0,8	9	1,9

3) On étudie le cas des diodes considérées réelles avec une tension de seuil $u_s \neq 0$.

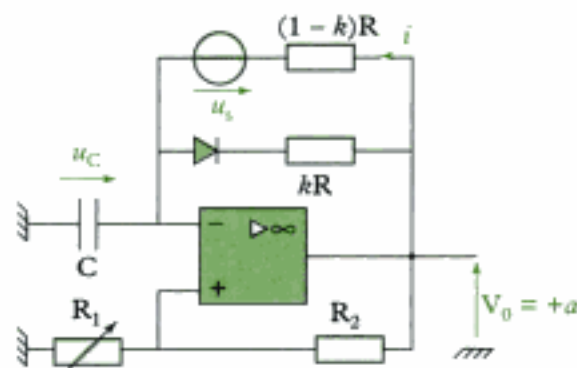
Considérons un cas de conduction, celui de la branche contenant la résistance $(1-k)R$ par exemple (troisième phase de la question 2).

On a généralement : $a \gg u_s$.

L'équation différentielle devient :

$$a = (1-k)RC \frac{du_C}{dt} + u_s + u_C$$

soit : $a - u_s = (1-k)RC \frac{du_C}{dt} + u_C$



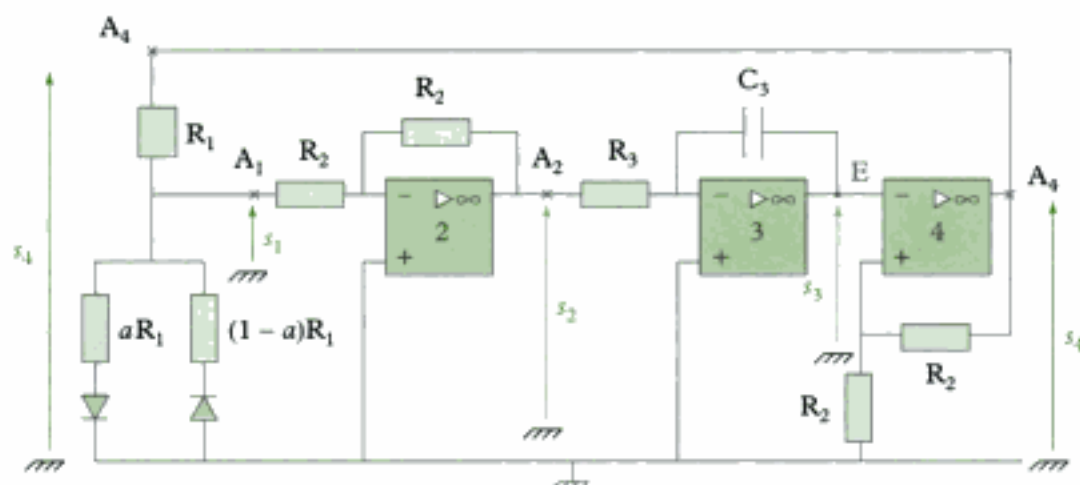
Elle est du même type que (1), à la condition de poser $a' = a - u_s$. β , α et T ne dépendent pas de a donc pas de u_s .

Seul le **seuil de basculement** en dépend, c'est-à-dire la tension aux bornes du condensateur lors du basculement. De βa , cette tension devient : $\beta a' < \beta a$.

Exercices de niveau 3

Exercice 6

On associe les tensions s_1, s_2, s_3, s_4 aux points A_1, A_2, E, A_4 du circuit (cf. schéma).



L'amplificateur opérationnel n° 4 est le seul à posséder une réaction positive et une réaction négative. Comme le suggère l'énoncé, nous faisons l'hypothèse que cet amplificateur opérationnel fonctionne en régime non linéaire. Nous reconnaissons un montage comparateur à hystérésis inverseur.

• Première phase

À $t = 0$, on suppose que : $s_4 = +V_{\text{sat}}$. On a donc $s_4 > 0$, donc la diode dans la branche contenant la résistance aR_1 est passante. Par un diviseur de tension, on obtient :

$$s_1 = aR_1 \frac{s_4}{R_1 + aR_1} = \left(\frac{a}{1+a} \right) V_{\text{sat}}$$

Le montage de l'amplificateur opérationnel n° 2 est inverseur ; on a donc :

$$s_2 = -s_1 = -\left(\frac{a}{1+a} \right) V_{\text{sat}}$$

L'amplificateur opérationnel n° 3 associé à R_3 et C_3 est intégrateur. À sa sortie, on a donc :

$$s_3(t) = s_3(0) - \frac{1}{R_3 C_3} \int_0^t s_2(t) dt = s_3(0) - \frac{1}{R_3 C_3} \int_0^t -\frac{a}{1+a} V_{\text{sat}} dt.$$

Faisons l'hypothèse que $u_{C_3}(0) = 0$ V, c'est-à-dire que le condensateur n'est pas chargé à $t = 0$ s. Il en ressort que $s_3(0) = 0$ puisque la borne non inverseuse de l'amplificateur opérationnel n° 3 est reliée à la masse.

Durant cette première phase on a donc :

$$s_3(t) = \frac{V_{\text{sat}}}{R_3 C_3} \frac{a}{(1+a)} t \quad (1)$$

$s_3(t)$, au départ nulle, croît au cours du temps jusqu'à ce que sa valeur atteigne le seuil haut du comparateur à hystérésis inverseur dont on sait qu'il est égal à :

$$e_H = \frac{R_2}{R_2 + R_2} V_{\text{sat}} = \frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

Ceci se produit à la date t_1 telle que :

$$\frac{V_{\text{sat}}}{R_3 C_3} \frac{a}{(1+a)} t_1 = \frac{V_{\text{sat}}}{2}, \text{ donc : } t_1 = \frac{(1+a)}{a} \times \frac{1}{2} \times R_3 C_3.$$

• Deuxième phase

À $t = t_1$, s_4 passe à $-V_{\text{sat}}$, donc $s_4 < 0$ et la diode dans la branche contenant la résistance $(1-a)R_1$ conduit. Toujours par un diviseur de tension, on obtient :

$$s_1 = \frac{(1-a)R_1(-V_{\text{sat}})}{R_1 + (1-a)R_1} = \frac{-(1-a)R_1 V_{\text{sat}}}{R_1(2-a)}, \text{ soit : } s_1 = -\frac{(1-a)}{(2-a)} V_{\text{sat}}.$$

De même :

$$s_2 = -s_1 = -\left(\frac{1-a}{2-a}\right) V_{\text{sat}}.$$

Alors :

$$s_3(t) = -\frac{1}{R_3 C_3} \int_{t_1}^t \left(\frac{1-a}{2-a}\right) V_{\text{sat}} dt + s_3(t_1).$$

Or, $s_3(t_1) = \frac{V_{\text{sat}}}{R_3 C_3} \frac{a}{1+a} \frac{1+a}{a} \frac{1}{2} R_3 C_3$, donc :

$$s_3(t_1) = \frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

Dans la phase n° 2, $s_3(t)$ évolue selon :

$$s_3(t) = \frac{V_{\text{sat}}}{2} - \frac{1}{R_3 C_3} \frac{(1-a)}{(2-a)} V_{\text{sat}} (t - t_1)$$

$s_3(t)$ décroît donc au cours du temps, jusqu'à atteindre le seuil bas e_B du comparateur à hystérésis :

$$e_B = -\frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

Ceci se produit à la date t_2 telle que :

$$s_3(t_2) = e_B = -\frac{V_{\text{sat}}}{2}, \text{ soit : } \frac{V_{\text{sat}}}{2} - \frac{1}{R_3 C_3} \frac{(1-a)}{(2-a)} V_{\text{sat}} (t_2 - t_1) = -\frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

On obtient donc :

$$t_2 - t_1 = \frac{(2-a)}{(1-a)} R_3 C_3.$$

• Troisième phase

À la date t_2 , la sortie du comparateur bascule à $s_4 = +V_{\text{sat}}$.

On retrouve donc les conditions de la phase 1, à l'exception de la valeur de la tension aux bornes du condensateur.

On a donc :

$$s_3(t) = \frac{V_{\text{sat}}}{R_3 C_3} \frac{a}{(1+a)} t + s_3(t_2),$$

$$\text{avec } s_3(t_2) = \frac{V_{\text{sat}}}{2} - \frac{1}{R_3 C_3} \frac{1-a}{2-a} V_{\text{sat}} (t_2 - t_1) = \frac{V_{\text{sat}}}{2} - \frac{1}{R_3 C_3} \frac{1-a}{2-a} V_{\text{sat}} R_3 C_3 \frac{(2-a)}{(1-a)} = -\frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

Alors :

$$s_3(t) = \frac{V_{\text{sat}}}{R_3 C_3} \frac{a}{(1+a)} (t - t_2) - \frac{V_{\text{sat}}}{2}$$

La tension $s_3(t)$ croît jusqu'à atteindre la tension de basculement haute e_H de comparateur à hystérésis. Ceci se produit à la date t_3 telle que :

$$s_3(t_3) = \frac{V_{\text{sat}}}{R_3 C_3} \frac{a}{(1+a)} (t_3 - t_2) - \frac{V_{\text{sat}}}{2} = \frac{V_{\text{sat}}}{2}, \text{ donc : } t_3 - t_2 = \frac{1+a}{a} R_3 C_3.$$

$$\text{À cette date : } s_3(t_3) = \frac{V_{\text{sat}}}{2}.$$

• Quatrième phase

À la date t_3 , la sortie de s_4 bascule à $-V_{\text{sat}}$. Les conditions initiales de la quatrième phase sont celles de la deuxième phase.

Les oscillations vont se continuer de manière identique à l'enchaînement précédent (phase 2, phase 3, phase 2...).

La période est donc :

$$T = t_3 - t_1 = (t_3 - t_2) + (t_2 - t_1)$$

$$\text{Ici, } T = \frac{(1+a)}{a} R_3 C_3 + \frac{(2-a)}{(1-a)} R_3 C_3, \text{ soit :}$$

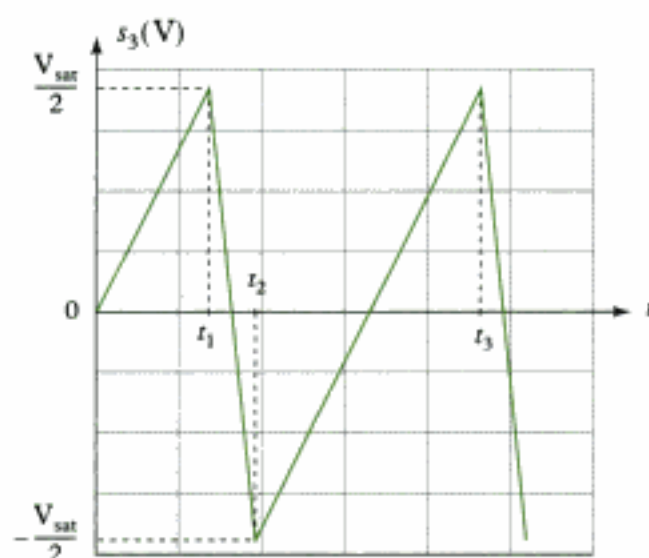
$$T = R_3 C_3 \left[\frac{1+a}{2} + \frac{2-a}{1-a} \right] = R_3 C_3 \left(\frac{1+2a-2a^2}{a(1-a)} \right)$$

$$T = R_3 C_3 \left(2 + \frac{1}{a(1-a)} \right)$$

La période dépend de $R_3 C_3$, mais aussi de a .

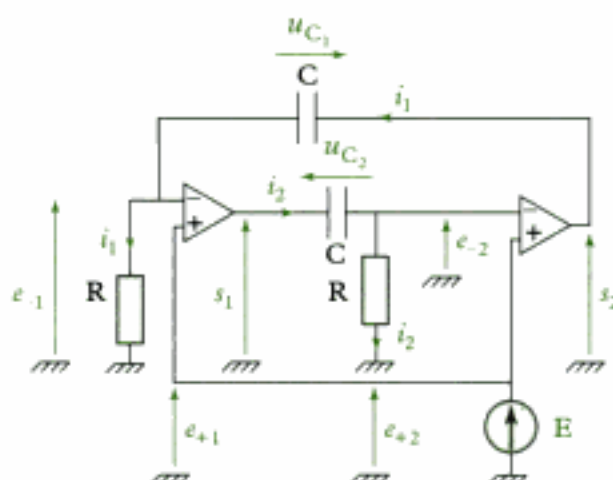
Le potentiomètre aR_1 , $(1-a)R_1$ permet donc de régler la période des oscillations.

La présence de deux chemins résistifs différents aR_1 et $(1-a)R_1$ permet d'obtenir un signal triangle non symétrique (cf. figure).



Exercice 7

1)



• Situation initiale ($t = 0$)

Si $s_2 = +V_{\text{sat}}$, comme $e_{-1} = s_2 - u_{C_1}$ et que $u_{C_1}(t = 0) = 0$, alors :

$$e_{-1} = s_2 = +V_{\text{sat}} \text{ et } \varepsilon_2 > 0.$$

Dans ce cas, $e_{-1} > e_{+1} = E$ puisque $E < V_{\text{sat}}$, donc :

$$\varepsilon_1 = e_{+1} - e_{-1} < 0 \Rightarrow s_1 = -V_{\text{sat}}.$$

Comme $u_{C_2}(t = 0) = 0$, alors : $e_{-2} = -V_{\text{sat}}$ et $e_{-2} < e_{+2}$. Donc :

$$\varepsilon_2 = e_{+2} - e_{-2} > 0.$$

Ce qui est conforme aux hypothèses de départ.

• Première phase d'évolution du circuit

Établissons la loi d'évolution de e_{-1} à partir de $t = 0$. On a :

$$Ri_1 + u_{C_1} = s_2 = +V_{\text{sat}}.$$

Or $Ri_1 = e_{-1}$, donc : $e_{-1} = V_{\text{sat}} - u_{C_1}$; en dérivant, on obtient :

$$\frac{de_{-1}}{dt} = -\frac{du_{C_1}}{dt} = -\frac{i_1}{C} = -\frac{e_{-1}}{RC}.$$

L'équation différentielle $\frac{de_{-1}}{dt} + \frac{e_{-1}}{RC} = 0$ admet pour solution :

$$e_{-1}(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Or à $t = 0$, $e_{-1} = +V_{\text{sat}}$, donc :

$$e_{-1}(t) = V_{\text{sat}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

De même, pour $e_{-2}(t)$, on obtient, $s_1 = -V_{\text{sat}} = u_{C_2} + e_{-2}$, soit :

$$\frac{du_{C_2}}{dt} + \frac{de_{-2}}{dt} = 0, \text{ avec } \frac{du_{C_2}}{dt} = -\frac{i_2}{C}.$$

On obtient :

$$\frac{de_{-2}}{dt} + \frac{e_{-2}}{RC} = 0 \Rightarrow e_{-2} = -V_{\text{sat}} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Si rien ne se produit, la tension e_{-1} décroît de V_{sat} à 0 et la tension e_{-2} croît de $-V_{\text{sat}}$ à 0.

La tension e_{-2} ne peut provoquer de basculement car elle n'atteint jamais $e_{+2} = E$.

Par contre, lorsque e_{-1} atteint $e_{+1} = E$, le premier AO bascule en sortie.

• Deuxième phase d'évolution du circuit

La sortie de l'AO₁ bascule à la date t_1 telle que :

$$e_{-1}(t_1) = V_{\text{sat}} \exp\left(-\frac{t_1}{RC}\right) = E, \text{ soit : } t_1 = RC \ln\left(\frac{V_{\text{sat}}}{E}\right).$$

La sortie s_1 est donc alors égale à $+V_{\text{sat}}$.

La tension aux bornes de C_2 est une grandeur continue, donc : $u_{C_2}(t_{1-}) = u_{C_2}(t_1)$. Or :

$$u_{C_2}(t_{1-}) = s_1(t_{1-}) - e_{-2}(t_{1-}) = -V_{\text{sat}} - (-E)$$

puisque e_{-1} et e_{-2} évoluent symétriquement : $e_{-1}(t) = -(e_{-2}(t))$.

Après basculement, $u_{C_2}(t_{1+}) = u_{C_2}(t_{1-}) = s_1(t_{1+}) - e_{-2}(t_{1+})$. On en déduit que :

$$e_{-2}(t_{1+}) = s_1(t_{1+}) - u_{C_2}(t_{1+}), \text{ donc : } e_{-2}(t_{1+}) = +V_{\text{sat}} - (-V_{\text{sat}} + E) = 2V_{\text{sat}} - E.$$

À partir de t_{1+} , la loi d'évolution de e_{-2} est encore donnée par l'équation différentielle : $\frac{de_{-2}}{dt} + \frac{e_{-2}}{RC} = 0$, donc la solution est :

$$e_{-2}(t) = (2V_{\text{sat}} - E) \exp\left[-\left(\frac{t - t_1}{RC}\right)\right]$$

Pour ce qui est de $e_{-1}(t)$ si $t > t_1$, comme précédemment on établit sa valeur à $t_1 = t_{1+}$ en s'aidant du fait que la tension aux bornes de u_{C_1} est continue. On obtient :

$$u_{C_1}(t_{1-}) = s_2(t_{1-}) - e_{-1}(t_{1-}).$$

Or $s_2(t_{1-}) = +V_{\text{sat}}$ par hypothèse et $e_{-1}(t_{1-}) = E$, donc :

$$u_{C_1}(t_{1-}) = V_{\text{sat}} - E.$$

Avec $u_{C_1}(t_{1+}) = s_2(t_{1+}) - e_{-1}(t_{1+})$, on obtient : $e_{-1}(t_{1+}) = -2V_{\text{sat}} + E$ puisque $s_2(t_{1+}) = -V_{\text{sat}}$.

La loi d'évolution de $e_{-1}(t)$ si $t > t_1$ est :

$$e_{-1}(t) = (-2V_{\text{sat}} + E) \exp\left[-\left(\frac{t - t_1}{RC}\right)\right]$$

– La tension $e_{-1}(t)$ évolue de $-2V_{\text{sat}} + E$ jusqu'à 0 si rien ne se produit. Or $-2V_{\text{sat}} + E < E$, donc cet AO ne peut basculer.

– La tension $e_{-2}(t)$ évolue de $2V_{\text{sat}} - E$ qui est supérieur à V_{sat} jusqu'à 0, si rien ne se produit. Or, dans cette évolution, $e_{-2}(t)$ « croise » la valeur E . Il y aura donc basculement de l'AO₂.

• Troisième phase

Le basculement de l'AO₂ se produit à la date t_2 telle que :

$$e_{-2}(t_2) = E,$$

$$\text{soit : } (2V_{\text{sat}} - E) \exp \frac{-(t_2 - t_1)}{RC} = E \text{ ou } t_2 - t_1 = RC \ln \left(\frac{(2V_{\text{sat}} - E)}{E} \right).$$

À l'instant t_2 , $s_2 = +V_{\text{sat}}$.

Nous retrouvons ici les conditions de la première phase rencontrée. Seule la condition initiale change.

s_1 bascule à $-V_{\text{sat}}$ et $u_{C_1}(t_{2+}) = -V_{\text{sat}} + E$ et $u_{C_2}(t_{2+}) = V_{\text{sat}} - E$, ce qui permet de calculer

$$e_{-1}(t_{2+}) = 2V_{\text{sat}} - E \text{ et } e_{-2}(t_{2+}) = -2V_{\text{sat}} + E$$

comme précédemment.

On obtient alors les équations d'évolutions :

$$e_{-1}(t) = (2V_{\text{sat}} - E) \exp \frac{-(t - t_2)}{RC} \text{ et } e_{-2}(t) = (-2V_{\text{sat}} + E) \exp \frac{-(t - t_2)}{RC}$$

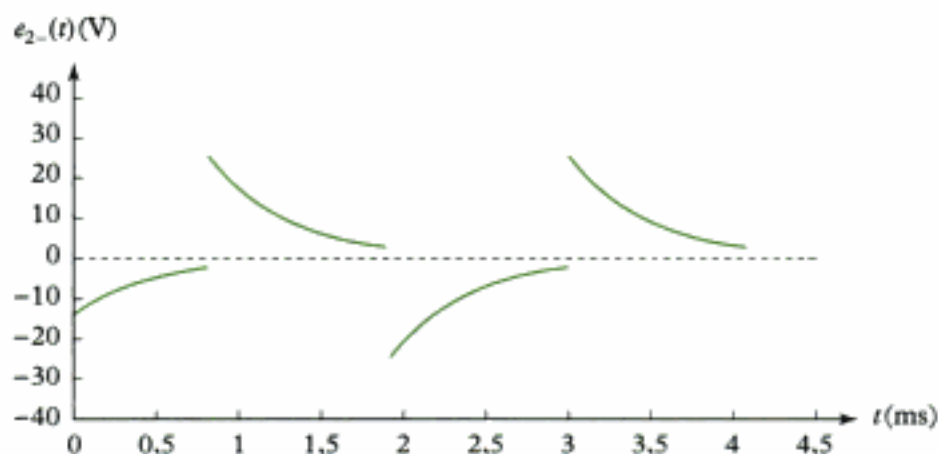
Lorsque $t = t_3$ tel que $t_3 - t_2 = RC \ln \left(\frac{2V_{\text{sat}} - E}{E} \right)$, la sortie de l'AO₁ bascule à $s_1 = +V_{\text{sat}}$ et nous nous retrouvons dans une situation analogue à la deuxième phase. Le cycle se reproduit.

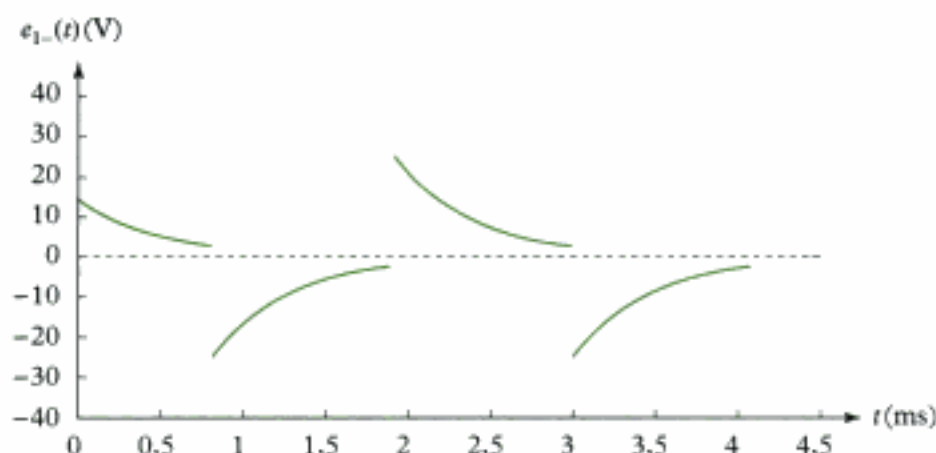
À partir de $t = t_1$, les tensions sont périodiques :

$$T = (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) = 2(t_2 - t_1) = 2RC \ln \left(\frac{2V_{\text{sat}} - E}{E} \right)$$

$$T = 2RC \ln \left(\frac{2V_{\text{sat}} - E}{E} \right)$$

2) On obtient les courbes suivantes :





Exercice 8

L'amplificateur opérationnel possède une seule réaction positive. Il est donc instable : sa sortie est $s = \pm V_{\text{sat}}$ (mode saturé).

Soit e_0 la valeur de la tension e^- avant que cette tension ne devienne positive ($e_0 = -5$ V).

Le régime est supposé établi depuis longtemps alors que $e^- = e_0$. La sortie s est donc depuis longtemps dans un état $s = \pm V_{\text{sat}}$. Le condensateur C s'est donc chargé jusqu'à $u_C = \pm V_{\text{sat}}$ et aucun courant ne le traverse plus : $i_C = 0$, donc $i_R = 0$ puisque par hypothèse $i_+ = 0$.

On en déduit que $u_R = 0 = e^+$.

Tant que $t \leq t_0$, $\varepsilon = e^+ - e^- = 0 - (e_0) = +5$ V > 0.

Si $\varepsilon > 0$, alors : $s = +V_{\text{sat}}$, donc : $u_C = +V_{\text{sat}}$.

À $t = t_0$, e^- devient positive un court instant.

Comme $\varepsilon = e^+ - e^- = 0 - e^- < 0$, la sortie bascule à $s = -V_{\text{sat}}$, soit un saut de $-2V_{\text{sat}}$.

La tension aux bornes du condensateur étant une grandeur continue, e^+ passe donc de 0 à $-2V_{\text{sat}}$ de manière à ce que $(u_C)_{t < t_0} = u_C(t = t_0)$ vaille :

$$V_B(t_0) - V_A(t_0), \text{ soit : } +V_{\text{sat}} = -V_{\text{sat}} - (-2V_{\text{sat}}).$$

On a donc encore : $\varepsilon = e^+ - e^- = -2V_{\text{sat}} - e^- < 0$, donc la sortie reste à $s = -V_{\text{sat}}$.

Avec les conventions d'orientation pour les tensions et les courants indiquées sur la figure, on a :

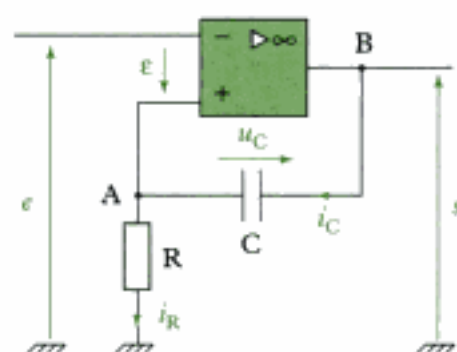
$$u_R + u_C = s, \text{ soit : } Ri + u_C = -V_{\text{sat}},$$

et encore : $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = -V_{\text{sat}}$, équation différentielle dont la solution est :

$$u_C(t) = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - V_{\text{sat}}.$$

Or, à $t = t_0$, $u_C(t_0) = +V_{\text{sat}}$, donc : $+V_{\text{sat}} = A \exp\left(-\frac{t_0}{RC}\right) - V_{\text{sat}}$, ce qui donne :

$$A = 2V_{\text{sat}} \exp\left(\frac{t_0}{RC}\right).$$



Ainsi, $u_C(t) = V_{\text{sat}} \left(-1 + 2 \exp\left(-\frac{(t-t_0)}{RC}\right) \right)$.

À $t = t_0$, on a bien : $u_C(t_0) = +V_{\text{sat}}$.

La tension e^- repasse rapidement à $e^- = e_0 = -5$ V, ce qui ne change rien à l'état de la sortie puisque $\varepsilon = e^+ - e^- = -2V_{\text{sat}} - (e_0)$ et que $2V_{\text{sat}} > 5$ V, donc $\varepsilon < 0$.

La tension $u_R = e^+$ vaut alors : $u_R = e^+ = s - u_C = -V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}} \left(-1 + 2 \exp\left(-\frac{(t-t_0)}{RC}\right) \right)$, donc :

$$e^+ = -2V_{\text{sat}} \exp\left(-\frac{(t-t_0)}{RC}\right).$$

Si $t \rightarrow +\infty$, $e^+ \rightarrow 0$ en croissant depuis $e^+(t = t_0) = -2V_{\text{sat}}$.

Lors de cette croissance, e^+ va atteindre la valeur $e_0 = -5$ V qui est le potentiel de e^- . Il y aura alors

bascullement de la sortie à $s = +V_{\text{sat}}$ à la date t_1 donnée par $-5 = -2V_{\text{sat}} \exp\left(-\frac{(t_1-t_0)}{RC}\right)$.

À cet instant, la tension aux bornes du condensateur est :

$$u_C(t_1) = V_B(t_1) - V_A(t_1) = -V_{\text{sat}} - e_0 = -10$$
 V.

À la suite du basculement en t_1 , on a :

$$u_C + u_R = s = +V_{\text{sat}}, \text{ soit : } u_C + RC \frac{du_C}{dt} = +V_{\text{sat}}.$$

La solution de cette équation est : $u_C = V_{\text{sat}} + B \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.

Compte tenu de $u_C(t_1)$ et de la continuité de la tension aux bornes du condensateur,

$$u_C(t_1) = -V_{\text{sat}} - e_0 = V_{\text{sat}} + B \exp\left(-\frac{t_1}{RC}\right), \text{ donc : } B = (-2V_{\text{sat}} - e_0) \exp\left(\frac{t_1}{RC}\right)$$

$$u_C(t) = V_{\text{sat}} - (2V_{\text{sat}} + e_0) \exp\left(\frac{t_1}{RC}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

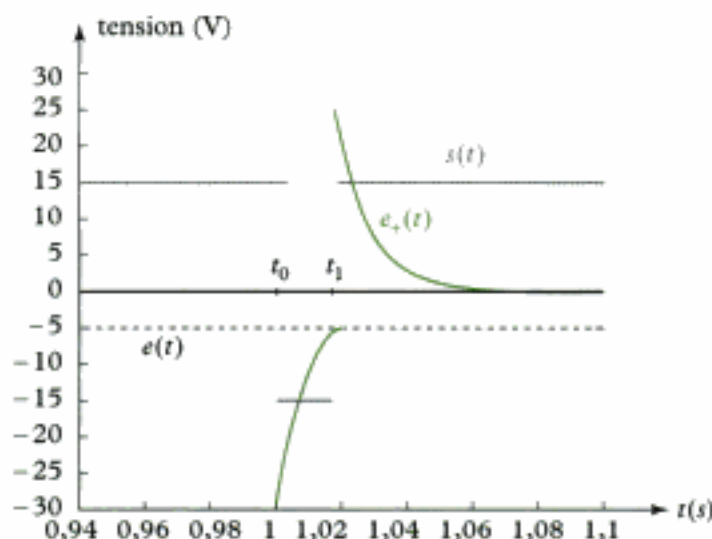
$$u_C(t) = V_{\text{sat}} - (2V_{\text{sat}} + e_0) \exp\left(-\frac{t-t_1}{RC}\right)$$

Or, $e^+ = u_R = s - u_C(t) = V_{\text{sat}} - u_C(t)$.

e^+ reste donc toujours > 0 , car si $t \rightarrow +\infty$, $e^+ \rightarrow 0$ et $e^+(t = t_1) = 2V_{\text{sat}} + e_0 > 0$.

La tension e^+ ne repassera pas par la valeur $e^- = e_0$. Le système ne basculera plus.

En termes de chronogrammes, on obtient avec $R = 10$ k Ω et $C = 1$ μ F :



Hidden page

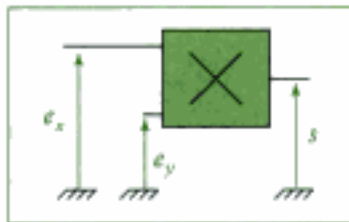


Fig. 1 - Symbole de la multiplication.

1. Il est très fréquent d'avoir un coefficient k inférieur à l'unité pour éviter la saturation de la sortie du multiplieur. Ce coefficient dépend du circuit intégré choisi.

A. Présentation de la fonction multiplication

La fonction multiplication consiste à effectuer, à partir de deux signaux d'entrée que nous pouvons noter $e_x(t)$ et $e_y(t)$, le produit de ces signaux (fig. 1). Le signal de sortie s'exprimera alors sous la forme suivante :

$$s(t) = k e_x(t) e_y(t).$$

Le coefficient k s'exprime en volts^{-1} si les signaux $s(t)$, $e_x(t)$ et $e_y(t)$ s'expriment en volts. Dans de nombreux cas, nous noterons :

$$k = \frac{1}{E_0}, \text{ avec } E_0 \text{ en volts.}$$

B. Le circuit multiplieur AD633

Le circuit intégré AD633 est un circuit intégré multiplieur standard conçu pour de multiples applications (fig. 2) :

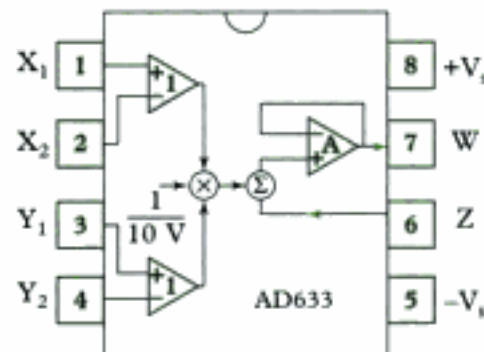


Fig. 2 - Circuit intégré multiplieur AD633 (donnée constructeur).

Le constructeur donne, avec ses notations, l'expression du signal de sortie W en fonction des signaux d'entrée X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 et Z :

$$W = \frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10 \text{ V}} + Z.$$

Ce montage intègre d'autres fonctions en complément de la multiplication :

- amplification différentielle pour les entrées X et Y ; en effet, les signaux X_1 , X_2 permettent de produire le signal différentiel $(X_1 - X_2)$, et Y_1 , Y_2 permettent de produire le signal différentiel $(Y_1 - Y_2)$;
- sommation, le résultat de la multiplication $\frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{10 \text{ V}}$ étant additionné à l'entrée Z ;
- un étage suiveur est présent en sortie.

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes :

$$X_1 - X_2 = e_x \text{ (tension différentielle pour l'entrée X)}$$

$$Y_1 - Y_2 = e_y \text{ (tension différentielle pour l'entrée Y)}$$

$$Z = e_z$$

$$W = s \text{ (tension de sortie)}$$

$$\frac{1}{10 \text{ V}} = \frac{1}{E_0} = k.$$

Ce qui donne la formule :

$$s = k e_x e_y + e_z$$

Hidden page

C. Multiplication de deux tensions dont l'une est continue

C.1. Principe et dispositif expérimental

Nous allons appliquer sur l'une des entrées (ici Y) un signal continu noté E_y , en pratique fourni par une alimentation continue, et sur l'autre entrée une tension variable $e_x(t)$ fournie par un générateur basse fréquence (fig. 3).

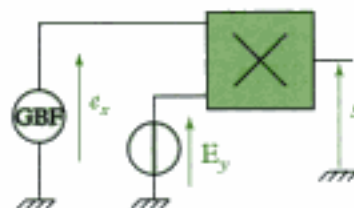
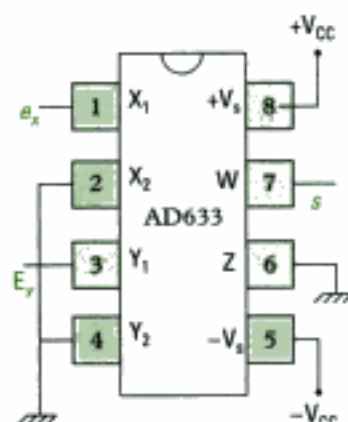


Fig. 3 - Multiplication de deux tensions dont l'une est continue¹.

1. Le brochage du circuit intégré AD633 est donné ci-dessous.



2. Nous pouvons remarquer que si E_y est négatif, l'amplificateur de tension ainsi réalisé est inverseur.

C.2. Étude théorique

Le schéma de principe de la figure 3 nous permet d'écrire :

$$s(t) = k e_x(t) E_y.$$

Ici, comme le signal d'entrée E_y est continu, nous pouvons dire que $k E_y$ est une constante et nous pouvons définir le coefficient $A = k E_y$, sans unité², ce qui permet d'écrire :

$$s(t) = A e_x(t), \text{ avec } A = \frac{E_y}{E_0}.$$

Cette expression nous permet de voir que, lorsqu'un des signaux d'entrée est continu, la fonction multiplication est semblable à la fonction « amplification linéaire de tension » avec une amplification en tension :

$$A = \frac{s(t)}{e_x(t)} \text{ proportionnelle à } E_y.$$

C.3. Étude expérimentale

Réalisons le montage avec les conditions suivantes :

$$e_x(t) = 8 \cos(2\,000\pi t) \text{ et } E_y = 5 \text{ V.}$$

Nous pouvons relever les oscillogrammes de $e_x(t)$ et $s(t)$ (fig. 4) :

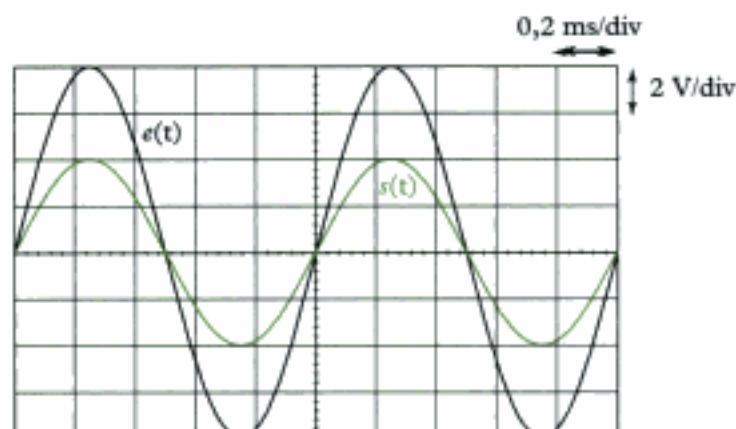


Fig. 4 - Signaux d'entrée et de sortie d'un multiplieur lorsqu'un signal continu est appliqué sur une entrée.

Nous constatons ici qu'avec un signal sinusoïdal en entrée, le signal de sortie est également sinusoïdal et de même fréquence que le signal d'entrée. Cette propriété se vérifiera tant que les limites dynamiques du multiplieur (bande passante et *slew rate*) ne sont pas atteintes.

Nous pouvons mesurer l'amplification du montage telle qu'elle a été définie dans la partie théorique :

$$A = \frac{s(t)}{e_x(t)} = \frac{4}{8} = 0,5.$$

Comme $|A|$ est inférieur à l'unité, le montage effectue en fait une atténuation. Nous pouvons par ailleurs vérifier la relation théorique :

$$A = kE_y = 0,1 \times 5 = 0,5.$$

Dans la bande passante du circuit (fréquences inférieures à 1 MHz), l'amplification A est constante, l'ensemble des harmoniques constituant le spectre du signal d'entrée va subir la même amplification, donc le signal de sortie a la même forme que le signal d'entrée.

Propriété 1

La multiplication d'un signal par un signal continu est une **opération linéaire**. Le spectre du signal de sortie est identique au spectre du signal d'entrée (à un coefficient multiplicateur près).

Nous verrons plus loin que cette propriété n'est pas valable dans les autres cas de figures (multiplication de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence ou de fréquence différente).

D. Multiplication de deux tensions sinusoïdales de même fréquence

D.1. Étude théorique

Le schéma du montage est donné en figure 5.

Les signaux d'entrée, synchrones, ont même fréquence F .

Notons E_{xm} et E_{ym} leurs amplitudes, φ_x et φ_y leurs phases par rapport à l'origine. Il vient :

$$e_x(t) = E_{xm} \cos(2\pi Ft + \varphi_x) \quad \text{et} \quad e_y(t) = E_{ym} \cos(2\pi Ft + \varphi_y).$$

Recherchons l'expression du signal de sortie $s(t)$:

$$s(t) = k e_x(t) e_y(t) = k E_{xm} \cos(2\pi Ft + \varphi_x) E_{ym} \cos(2\pi Ft + \varphi_y).$$

Nous savons d'autre part que :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

En posant $a = 2\pi Ft + \varphi_x$ et $b = 2\pi Ft + \varphi_y$, on obtient :

$$s(t) = \frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} [\cos(\varphi_x - \varphi_y) + \cos(2\pi \times 2Ft + \varphi_x + \varphi_y)].$$

Soit en développant l'expression :

$$s(t) = \frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} \cos(\varphi_x - \varphi_y) + \frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} \cos(2\pi \times 2Ft + \varphi_x + \varphi_y).$$

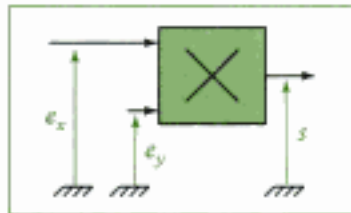


Fig. 5 - Schéma du montage réalisé.

Analysons les termes de cette somme :

- Le premier terme $\frac{k}{2}E_{xm}E_{ym}\cos(\varphi_x - \varphi_y)$ représente un signal continu, qui dépend de la différence de phase $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$, appelée également déphasage de $e_y(t)$ par rapport à $e_x(t)$.
- Le deuxième terme $\frac{k}{2}E_{xm}E_{ym}\cos(2\pi \times 2Ft + \varphi_x + \varphi_y)$ est un signal purement sinusoïdal, d'amplitude $\frac{k}{2}E_{xm}E_{ym}$, de fréquence $2F$ et de phase par rapport à l'origine $\varphi_x + \varphi_y$.

Propriété 2

La multiplication de deux signaux purement sinusoïdaux et de même fréquence F est une opération **non linéaire**, qui donne naissance à¹ :

- une composante continue proportionnelle à $\cos\varphi$, avec $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ déphasage de $e_y(t)$ par rapport à $e_x(t)$,
- une composante alternative sinusoïdale de fréquence $2F$, double de celle des signaux d'entrée.

1. Nous verrons par la suite qu'avec l'utilisation d'un filtre judicieusement choisi, il est possible d'extraire l'une ou l'autre des composantes. Cette multiplication permet ainsi d'obtenir :
– soit un signal image de $\cos\varphi$
– soit un signal de fréquence double de celle des signaux d'entrée.

D.2. Représentation spectrale du signal de sortie

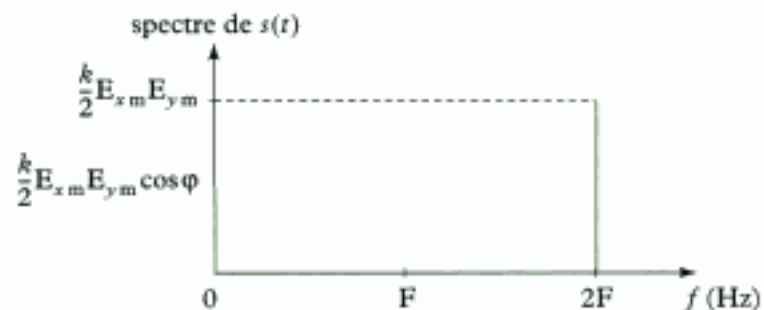


Fig. 6 - Spectre du signal de sortie.

Nous pouvons remarquer que la composante continue est nulle lorsque $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ et maximale pour $\varphi = 0$ (fig. 6).

D.3. Étude expérimentale

D.3.1 - Dispositif expérimental (fig. 7)

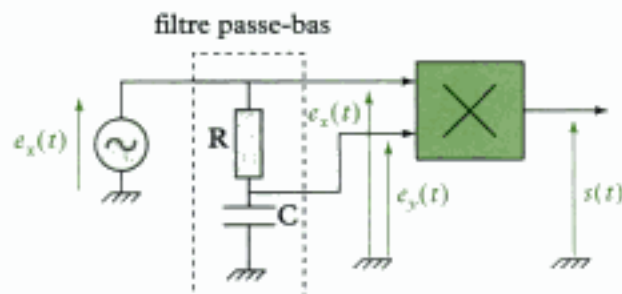


Fig. 7 - Dispositif expérimental permettant l'étude de la multiplication de deux signaux de même fréquence.

Le générateur basses fréquences délivre un signal sinusoïdal $e_x(t)$ de fréquence $F = 1$ kHz et d'amplitude $E_{xm} = 8$ V (fig. 8).

Le filtre délivre, à partir du signal $e_x(t)$, un signal $e_y(t)$ de même fréquence F , mais d'amplitude différente et déphasé par rapport à $e_x(t)$.

Hidden page

Hidden page

E. Multiplication de deux tensions sinusoïdales de fréquences différentes

E.1. Étude théorique

Les signaux d'entrée, asynchrones, ont chacun une fréquence différente que nous noterons F_x et F_y (fig. 10). La notion de phase à l'origine ne présente donc aucun intérêt dans cette étude.

Notons E_{xm} et E_{ym} leurs amplitudes. Ainsi :

$$e_x(t) = E_{xm} \cos(2\pi F_x t) \text{ et } e_y(t) = E_{ym} \cos(2\pi F_y t).$$

Recherchons l'expression du signal de sortie $s(t)$:

$$\begin{aligned} s(t) &= k e_x(t) e_y(t) \\ &= k E_{xm} \cos(2\pi F_x t) E_{ym} \cos(2\pi F_y t). \end{aligned}$$

Nous savons d'autre part que :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)].$$

En posant $a = 2\pi F_x t$ et $b = 2\pi F_y t$, on obtient :

$$s(t) = \frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} \{ \cos[2\pi(F_x - F_y)t] + \cos[2\pi(F_x + F_y)t] \}.$$

Soit, en développant l'expression :

$$s(t) = \frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} \cos[2\pi(F_x - F_y)t] + \frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} \cos[2\pi(F_x + F_y)t].$$

Nous pouvons distinguer ici une somme de deux termes, tous deux sinusoïdaux en fonction du temps. Chacun des deux termes représente donc un harmonique du signal $s(t)$.

– Les deux termes ont même amplitude :

$$\frac{k}{2} E_{xm} E_{ym}.$$

– Le premier terme a pour fréquence la valeur absolue de la différence des fréquences des signaux d'entrée :

$$|F_x - F_y|$$

(la valeur absolue se justifie par le fait qu'une fréquence négative n'a pas de sens du point de vue « physique » et par la parité de la fonction cosinus).

– Le second terme a pour fréquence la somme des fréquences des signaux d'entrée :

$$F_x + F_y.$$

Propriété 3

La multiplication de deux signaux purement sinusoïdaux de fréquences différentes F_x et F_y ¹ permet de produire deux signaux sinusoïdaux de fréquences :

$$|F_x - F_y| \text{ et } (F_x + F_y).$$

E.2. Représentation spectrale des signaux

Nous supposons par exemple F_x supérieure à F_y , ce qui conduit au spectre représenté en figure 11.

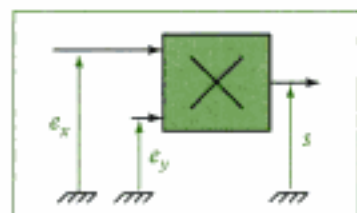
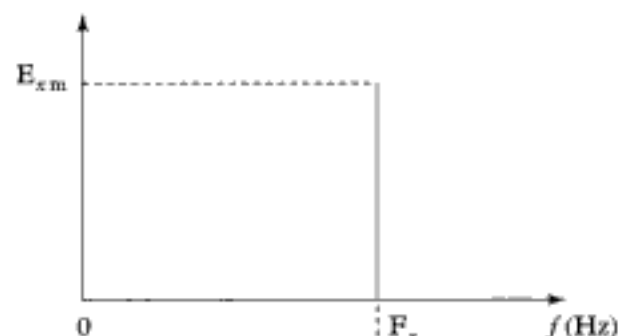


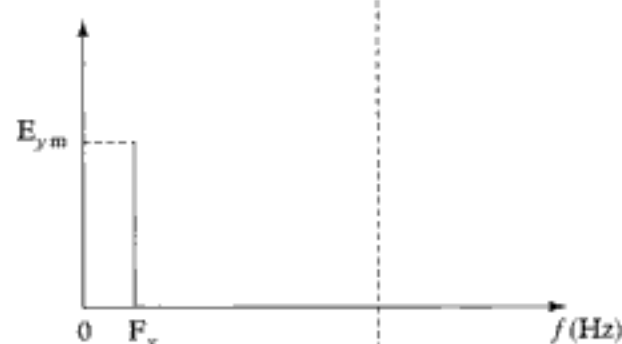
Fig. 10 - Schéma du montage réalisé.

¹ Un circuit effectuant l'opération de multiplication de deux signaux sinusoïdaux de fréquences différentes est également appelé circuit mélangeur.

a) spectre de $e_x(t)$



b) spectre de $e_y(t)$



c) spectre de $s(t)$

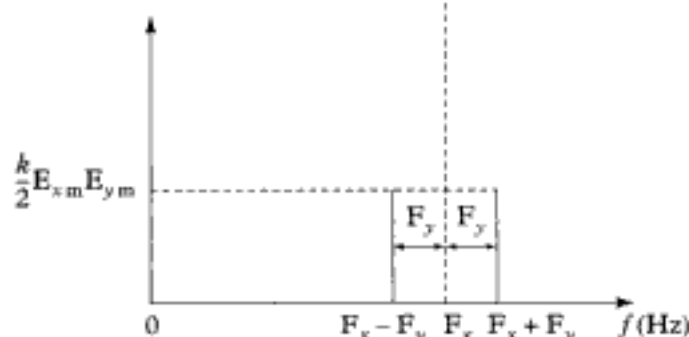


Fig. 11 - Spectres des différents signaux.

E.3. Étude expérimentale

• Dispositif expérimental (fig. 12)

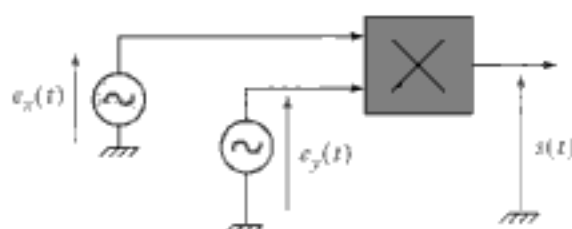


Fig. 12 - Dispositif expérimental permettant l'étude de la multiplication de deux signaux de fréquences différentes.

Cette expérience nécessite l'utilisation de deux générateurs basses fréquences qui ne sont pas synchronisés entre eux.

• Premier cas : les fréquences F_x et F_y sont relativement proches

Dans ce cas, nous aurons $F_x + F_y$ très supérieur à $|F_x - F_y|$.

Choisissons par exemple : $F_x = 1\,100$ Hz, $F_y = 1\,000$ Hz, $E_{xm} = 10$ V et $E_{ym} = 8$ V.

Voici l'oscillogramme qui a été enregistré pour le signal de sortie (fig. 13) :

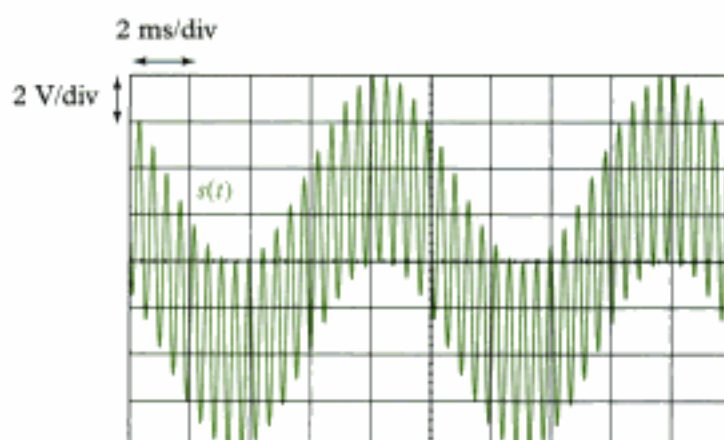


Fig. 13 - Oscillogrammes pour F_x proche de F_y .

Nous observons que ce signal est la somme de deux composantes toutes deux sinusoïdales :

- une composante « lente », de période $T_l = 10$ ms, donc de fréquence $F_l = 100$ Hz, et d'amplitude 4 V ;
- une composante « rapide », de fréquence¹ $F_r = 2\,100$ Hz et d'amplitude 4 V.

La composante « lente » est l'harmonique de fréquence $|F_x - F_y| = 100$ Hz, quant à la composante « rapide », sa fréquence correspond à $F_x + F_y = 2\,100$ Hz. Les résultats expérimentaux sont donc conformes à la théorie.

En théorie, nous avons montré que l'amplitude de ces composantes vaut :

$$\frac{k}{2} E_{xm} E_{ym} = \frac{0,1}{2} \times 8 \times 10 = 4 \text{ V.}$$

• Deuxième cas : les fréquences F_y et F_x sont relativement éloignées

Prenons $F_x \gg F_y$ par exemple. Dans ce cas, nous aurons $F_x + F_y$ très proche de $|F_x - F_y|$.

Choisissons par exemple : $F_x = 5$ kHz, $F_y = 100$ Hz, $E_{xm} = 8$ V et $E_{ym} = 10$ V.

Avec l'oscilloscope synchronisé sur l'entrée $e_y(t)$, nous pouvons visualiser les signaux $s(t)$ et $e_y(t)$ (fig. 14) :

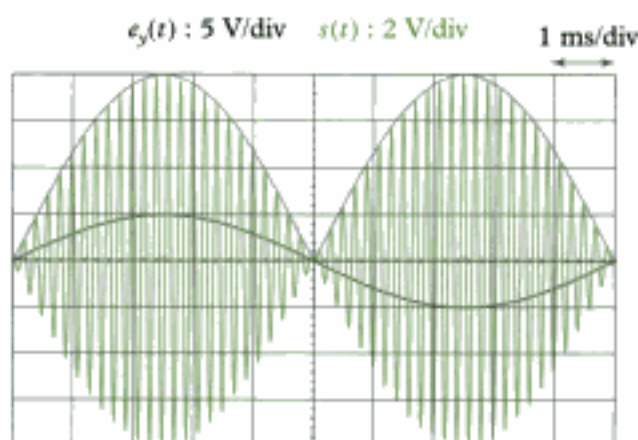


Fig. 14 - Oscillogrammes pour $F_x \gg F_y$.

Nous constatons que le signal issu du multiplieur se présente maintenant sous la forme d'ondulations pseudo-sinusoïdales de fréquence 5 000 Hz ayant une amplitude qui varie au cours du temps à la fréquence de 100 Hz.

¹ Cette composante comporte 42 périodes sur tout l'écran qui représente 20 ms, donc :

$$T_r = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{42}$$

ce qui implique :

$$F_r = \frac{1}{T_r} = 2\,100 \text{ Hz.}$$

Hidden page

Nous constatons que la composante continue présente dans le signal $e_y(t)$ a apporté un harmonique de fréquence F_x et d'amplitude $kE_{y0}E_{xm}$.

De même, nous constatons que si le signal $e_x(t)$ comporte une composante continue E_{x0} , le signal de sortie comportera en plus un harmonique de fréquence F_y et d'amplitude $kE_{x0}E_{ym}$.

Ce qui donne le spectre suivant (fig. 16) :

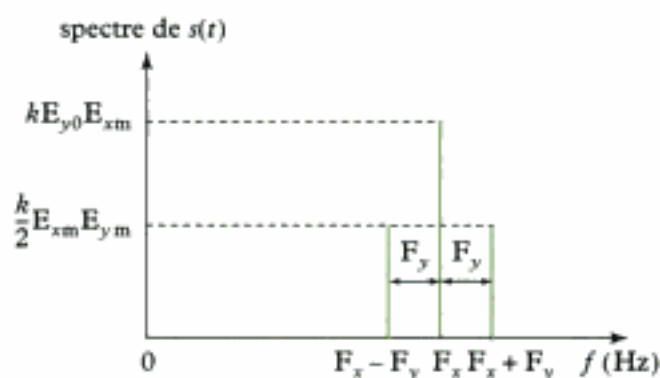


Fig. 16 - Spectre du signal de sortie.

E.5. Application : modulation d'amplitude

La modulation d'amplitude est une technique utilisée en télécommunications pour la transmission de signaux analogiques¹.

Un signal modulant basse fréquence est multiplié avec une porteuse sinusoïdale haute fréquence. Le signal résultant de cette opération est un signal modulé en amplitude.

Soit f_p la fréquence de la porteuse, nécessairement très supérieure à la fréquence du signal modulant². Ainsi, chaque harmonique de fréquence f du signal modulant donne lieu dans le signal modulé à deux harmoniques de fréquences $f_p - f$ et $f_p + f$.

Supposons pour fixer les idées un signal modulant comportant quatre harmoniques de fréquences F_1 à F_4 . Les spectres des signaux modulant et modulé ont ainsi l'allure suivante (fig. 17) :

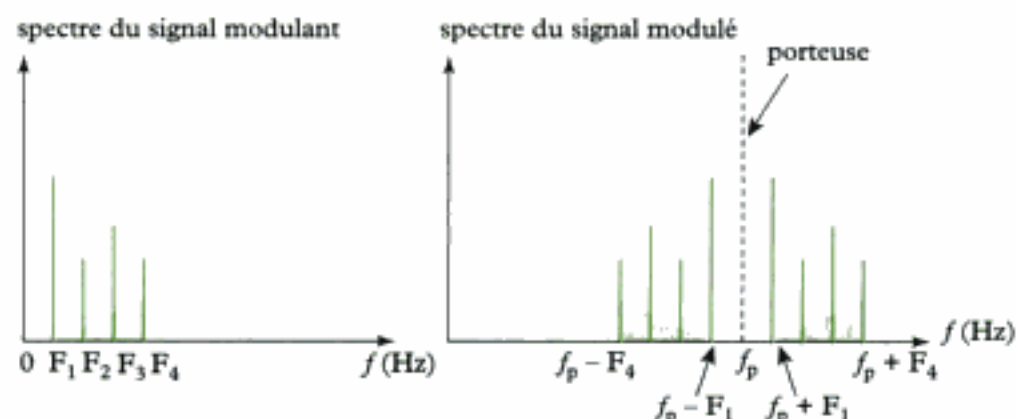


Fig. 17 - Spectre des signaux modulant³ et modulé.

La bande de fréquence occupée par le signal modulé est située dans les hautes fréquences (facilitant ainsi la transmission par voie hertzienne) alors que le signal modulant (porteur d'information) est un signal basse fréquence. L'opération de modulation constitue en quelque sorte une opération de changement de bande de fréquence.

1. Cette technique est par exemple utilisée dans la transmission radio grandes ondes (520-1 600 kHz) et petites ondes (150- 300 kHz).

2. Pour un signal audio, le spectre du signal modulant s'étend de quelques Hz à environ 15 kHz. La fréquence de la porteuse f_p vaut en transmission radio plusieurs centaines de kHz.

3. Pour simplifier, il est possible de schématiser le spectre du signal modulant par un triangle (représenté ici en clair).

Hidden page

Hidden page

Le convertisseur tension-courant permet de faire circuler dans le dipôle passif linéaire une intensité sinusoïdale en phase avec $e(t)$.

La tension $u(t)$ sera déphasée de φ par rapport à $i(t)$. Nous pouvons ainsi écrire :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

que nous pouvons également développer sous cette forme :

$$u(t) = U_m \cos \varphi \cos(\omega t) - U_m \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Le premier terme, en phase avec $e(t)$, apportera des informations sur R alors que le deuxième terme, en phase avec $e_q(t)$ apportera des informations sur X .

En multipliant ensuite $u(t)$ avec $e(t)$, puis $e_q(t)$, puis en extrayant les valeurs moyennes à l'aide de filtres passe-bas, nous allons produire des signaux continus s_p et s_q qui apporteront l'information permettant de déterminer R et X .

F.4. Étude théorique du dispositif expérimental

Le signal fourni par le générateur basses fréquences est un signal purement sinusoïdal de pulsation ω :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t).$$

Le convertisseur courant tension effectue la conversion de la tension $e(t)$ en un courant $i(t)$ qui s'exprime par :

$$i(t) = \frac{e(t)}{R_1} = \frac{E_m}{R_1} \cos(\omega t).$$

La connaissance de $i(t)$ nous permet de déterminer l'expression de $u(t)$ si le dipôle modélisé ici par une impédance Z est effectivement linéaire. En utilisant la notation complexe, nous avons :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} = Z e^{j\varphi} \frac{E_m}{R_1} e^{j\omega t} = Z \frac{E_m}{R_1} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\text{d'où : } u(t) = Z \frac{E_m}{R_1} \cos(\omega t + \varphi).$$

Déterminons maintenant $s_1(t)$ sachant que la constante du multiplieur est notée k :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= k u(t) e(t) = k \frac{Z}{R_1} E_m \cos(\omega t + \varphi) E_m \cos(\omega t) \\ &= \frac{k E_m^2 Z}{2 R_1} \cos(2\omega t + \varphi) + \frac{k E_m^2 Z}{2 R_1} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Le circuit constitué par $R_3 C_3$ est en fait un filtre passe-bas passif de pulsation de coupure :

$$\omega_c = \frac{1}{R_3 C_3}.$$

Si nous avons 2ω très supérieur à ω_c , le premier terme, de pulsation 2ω , est éliminé par le filtre. Le signal de sortie s'exprime alors selon :

$$s_p = \frac{k E_m^2 Z}{2 R_1} \cos \varphi = \frac{k E_m^2 R}{2 R_1} \text{ car } R = Z \cos \varphi.$$

Nous pouvons donc déduire R de s_p :

$$R = 2 R_1 \frac{s_p}{k E_m^2}.$$

Hidden page

F.5. Expérimentation

Nous souhaitons déterminer les propriétés d'un dipôle à la fréquence de 1 kHz. Nous prenons : $E_m = 8 \text{ V}$, $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R = 4,7 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$, $C_2 = 47 \text{ nF}$, $R_3 = 2,2 \text{ k}\Omega$, $C_3 = 1 \text{ }\mu\text{F}$.

Vérifions, dans un premier temps, que toutes les hypothèses théoriques sont bien remplies :

$$\omega = 2\pi f = 6\,280 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$R_2 C_2 \omega = 3,3 \cdot 10^3 \times 47 \cdot 10^{-9} \times 6\,280 = 0,97 \approx 1$$

$$\omega_c = \frac{1}{R_3 C_3} = \frac{1}{2,2 \cdot 10^3 \times 1 \cdot 10^{-6}} = 454 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \ll 2\omega = 12\,560 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

F.5.1 - Mesures

Le dipôle à identifier est constitué d'une bobine en série avec une résistance.

Nous pouvons mesurer au multimètre :

$$s_p = 1,35 \text{ V} \quad \text{et} \quad s_q = 2,52 \text{ V}.$$

F.5.2 - Exploitation des résultats

• Impédance du dipôle :

$$Z = 2R_1 \frac{\sqrt{s_p^2 + s_q^2}}{kE_m^2} = 2 \times 1 \cdot 10^3 \times \frac{\sqrt{1,35^2 + 2,52^2}}{0,1 \times 8^2} = 893 \text{ }\Omega.$$

• Déphasage du dipôle :

$$\varphi = \text{Arctan} \frac{s_q}{s_p} = \text{Arctan} \frac{2,52}{1,35} = 61,8^\circ.$$

• Résistance série du dipôle :

$$R = 2R_1 \frac{s_p}{kE_m^2} = 2 \times 1 \cdot 10^3 \times \frac{1,35}{0,1 \times 8^2} = 422 \text{ }\Omega.$$

• Réactance série du dipôle :

$$X = 2R_1 \frac{s_q}{kE_m^2} = 2 \times 1 \cdot 10^3 \times \frac{2,52}{0,1 \times 8^2} = 703 \text{ }\Omega.$$

La réactance étant positive, nous pouvons en déduire que le dipôle est inductif. Nous pouvons de ce fait calculer l'inductance équivalente du modèle série de ce dipôle :

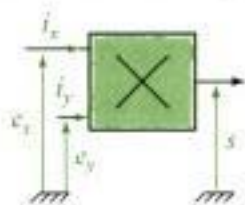
$$X = L\omega, \text{ donc : } L = \frac{X}{\omega} = \frac{703}{6\,280} = 0,112 \text{ H}.$$

F.6. Conclusion

La méthode de détection synchrone permet de déterminer les principaux paramètres d'un dipôle (impédance, déphasage, résistance série, réactance série) pour une fréquence donnée.

L'essentiel

✓ Propriétés essentielles d'un circuit multiplieur



- Pour un circuit multiplieur idéal, les courants d'entrée sont nuls :

$$i_x = 0 \quad \text{et} \quad i_y = 0.$$

- Le signal de sortie est l'image du produit des signaux d'entrée :

$$s = k e_x e_y,$$

où k est une constante qui dépend du circuit et s'exprime en V^{-1} . Il est également possible de poser :

$$k = \frac{1}{E_0}, \quad \text{avec en général } E_0 = 10 \text{ V de sorte que : } k = 0,1 \text{ V}^{-1}.$$

✓ Multiplication de deux signaux dont l'un est continu

- La multiplication d'un signal par un signal continu est une **opération linéaire**, tous les harmoniques du signal de sortie étant présents dans le spectre du signal d'entrée.
- Cette opération s'apparente en fait à la fonction amplification linéaire de tension.

✓ Multiplication de deux signaux de même fréquence F

La multiplication de deux signaux purement sinusoïdaux et de même fréquence F est une **opération non linéaire**, qui donne naissance à :

- une **composante continue** proportionnelle à $\cos \varphi$, avec $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ déphasage de $e_y(t)$ par rapport à $e_x(t)$;
- une **composante alternative sinusoïdale** de fréquence $2F$, double de celle des signaux d'entrée.

✓ Multiplication de deux tensions sinusoïdales et de fréquences différentes

La multiplication de deux signaux purement sinusoïdaux de fréquences F_x et F_y permet de produire deux signaux sinusoïdaux de fréquences :

$$|F_x - F_y| \quad \text{et} \quad (F_x + F_y).$$

✓ Détection synchrone

La **détection synchrone** consiste à extraire par filtrage la composante continue du produit de deux signaux de même fréquence mais déphasés. Elle permet d'accéder simplement à une mesure des propriétés d'un dipôle passif linéaire (impédance, déphasage, résistance série et réactance série).

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment déterminer le signal de sortie produit par un circuit comportant un multiplieur associé à un filtre ?

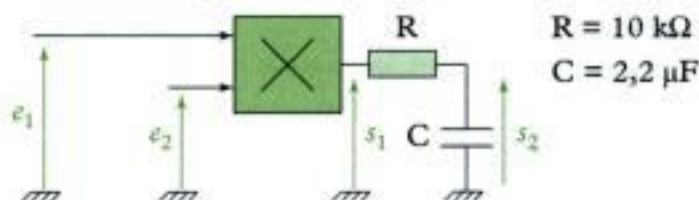
→ Savoir faire

- 1 Écrire l'équation instantanée du signal de sortie du multiplieur, les tensions d'entrée étant soit purement sinusoïdales, soit définies par une série de Fourier.
- 2 Linéariser cette expression de manière à la présenter sous forme d'une somme harmonique. Identifier les fréquences associées aux différents termes de cette somme.
- 3 Pour chacune des fréquences précédentes, déterminer la valeur de la fonction de transfert du filtre. En déduire si l'harmonique correspondant est éliminé ou non par le filtre.
- 4 Établir l'expression du signal de sortie en ne retenant que les harmoniques non éliminés par le filtre.

→ Application

Dans le montage ci-dessous, le signal $e_2(t)$ est de même fréquence, mais déphasé de φ par rapport au signal $e_1(t)$:

$e_1(t) = E \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi F$ et $e_2(t) = E \cos(\omega t - \varphi)$.



La fréquence de $e_1(t)$ vaut : $F = 250 \text{ Hz}$. La constante du multiplieur vaut : $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$. Déterminer le signal de sortie $s_2(t)$.

Solution

- 1 Exprimons le signal de sortie du multiplieur :

$$s_1(t) = k e_1(t) e_2(t) = k E \cos(\omega t) E \cos(\omega t - \varphi).$$

- 2 Linéarisons cette expression en utilisant la relation :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)] \text{ avec } a = \omega t \text{ et } b = \omega t - \varphi.$$

On en déduit donc :

$$s_1(t) = \frac{k}{2} E^2 [\cos(2\omega t) + \cos \varphi] = \frac{k}{2} E^2 \cos(2\omega t) + \frac{k}{2} E^2 \cos \varphi.$$

- Le premier terme a pour pulsation 2ω , donc pour fréquence $2F = 500 \text{ Hz}$.
 - Le deuxième terme est constant, il représente donc la composante continue de $s_1(t)$.
- 3 La fonction de transfert du filtre s'exprime (voir chapitre 4) :

$$\underline{H}(jf) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}}, \text{ avec } f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Supposons d'abord que le signal de modulation soit sinusoïdal :

$$v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t).$$

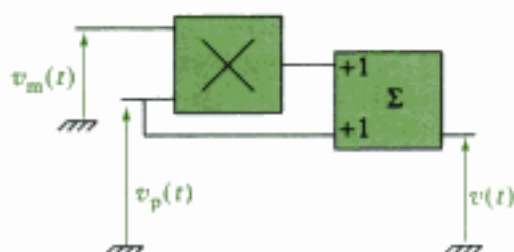
Ce signal module la porteuse :

$$v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t),$$

qui est la tension appliquée à l'antenne d'émission en l'absence de modulation. La porteuse est fournie par un oscillateur sinusoïdal haute fréquence dont la fréquence d'oscillation :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} \quad \left(f_p \gg f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} \right)$$

est particulièrement stable.

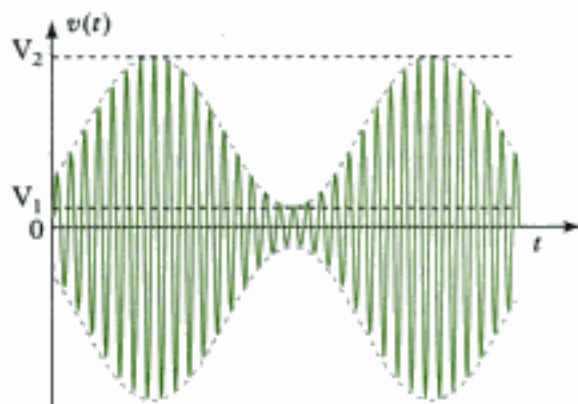


1) La modulation s'effectue à l'aide d'un circuit comprenant un multiplieur de constante multiplicative k et un additionneur (figure ci-dessus). Montrer que le signal modulé est de la forme :

$$v(t) = V_p [1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t),$$

où m est l'indice de modulation que l'on explicitera.

2) Afin de mesurer l'indice de modulation du signal porteur, on réalise l'oscillogramme représenté figure ci-dessous. Exprimer l'indice de modulation m en fonction des tensions extrémales $V_1 = 2 \text{ V}$ et $V_2 = 18 \text{ V}$, et le calculer numériquement.

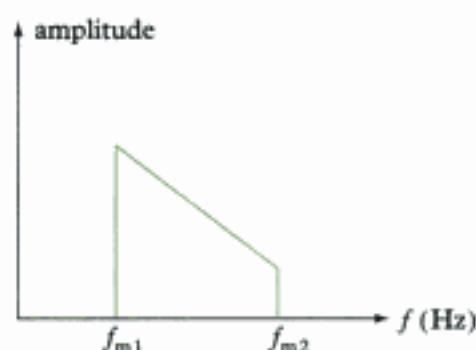


3) Déterminer le spectre de fréquences du signal modulé $v(t)$ et le représenter. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquences nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence f_m .

4) En l'absence de modulation ($m = 0$), la puissance rayonnée par l'antenne est $P = 2 \text{ 100 kW}$. Quelle puissance P_r rayonne cette antenne quand l'indice de modulation m a la valeur calculée à la question 2 ?

5) Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquences $[f_{m1}, f_{m2}]$ (figure ci-après). Représenter le spectre de fréquences du signal modulé.

En radiodiffusion, $f_{m1} = 300 \text{ Hz}$ et $f_{m2} = 4,5 \text{ kHz}$. Quelle est la largeur de la plage de fréquences occupée par le signal modulé ? Quel écart minimal de fréquence Δf_{\min} doit-il exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soient pas mutuellement brouillées ?



D'après écrit Centrale-Supélec, MP, 1998.

Ex. 8 Démodulation d'un signal (suite de l'exercice 7)

L'antenne du récepteur capte un signal modulé qui est appliqué à l'entrée d'un amplificateur à commande automatique de gain (CAG), c'est-à-dire que ce signal est d'autant plus amplifié que son amplitude au niveau de l'antenne est plus faible. L'amplificateur délivre un signal de la forme :

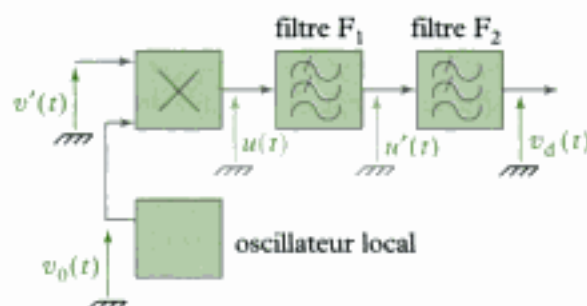
$$v'(t) = V_p' [1 + m' \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t)$$

avec V_p' constante par CAG.

Ce dernier signal est ensuite appliqué à l'entrée d'un démodulateur dont le rôle est de fournir un signal $v_d(t)$ image du signal de modulation :

$$v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t).$$

Le démodulateur comprend un oscillateur local délivrant un signal $v_0(t) = V_0 \cos(\omega_p t)$ synchrone de la porteuse, un multiplieur de constante multiplicative k , un filtre passe-bas F_1 idéal d'amplification $K_1 = 1$ pour $f \leq f_p$ et un filtre passe haut F_2 idéal d'amplification $K_2 = 1$ pour $f \geq f_m$.



1) Établir l'expression du signal démodulé $v_d(t)$ à la sortie du filtre F_2 .

2) On isole à l'aide d'un soustracteur la composante continue U du signal $u(t)$ en utilisant les signaux délivrés par les filtres F_1 et F_2 . Exprimer U . Quel renseignement nous fournit cette composante continue et à quoi peut-on l'utiliser ?

Hidden page

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) Soit $i(t)$ l'intensité du courant dans la résistance R :

$$i(t) = \frac{u(t) - s(t)}{R}.$$

D'autre part, d'après les propriétés du circuit multiplieur, nous avons :

$$s(t) = ku(t)E,$$

ce qui implique :

$$i(t) = \frac{u(t) - kEu(t)}{R} = u(t) \frac{1 - kE}{R}.$$

En considérant le multiplieur parfait, le courant consommé par ses entrée est nul, donc l'impédance vue depuis le générateur de $u(t)$ s'exprime par :

$$R_e = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{R}{1 - kE} = \frac{R}{1 - \frac{E}{E_0}}.$$

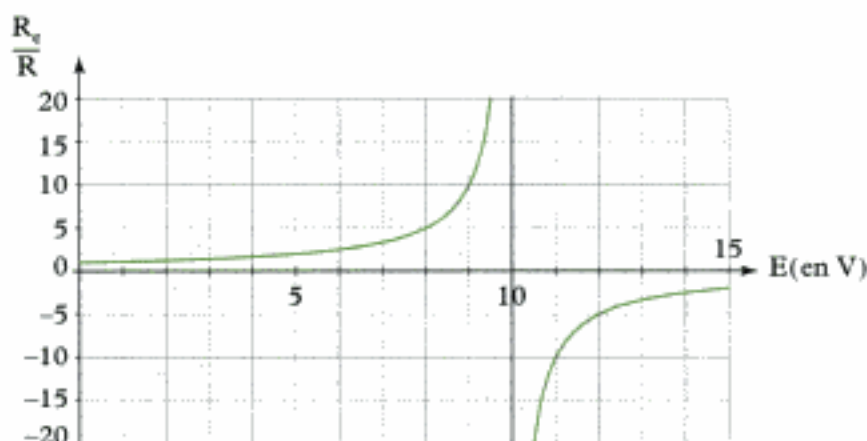
D'où :

$$R_e = \frac{R}{1 - \frac{E}{10}}$$

2) La tension E peut varier de 0 V à +15 V :

- pour $E = 0$, $R_e = R$;
- pour $E = +15$ V, $R_e = -2R$;
- pour $E = +10$ V, R_e est infinie.

La courbe $\frac{R_e}{R(E)}$ présente donc une asymptote verticale :



On peut remarquer que pour $E > 10$ V, la résistance d'entrée est négative. Ce circuit peut ainsi être utilisé pour réaliser un oscillateur quasi sinusoïdal (voir chapitre 6).

Exercice 2

1) D'après les propriétés des circuits multiplieurs, nous avons :

$$s_1(t) = ku^2(t).$$

Le quadripôle constitué de R et C est un filtre passif passe-bas qui, si sa fréquence de coupure est suffisamment basse, permet d'extraire la valeur moyenne de $s_1(t)$, ce qui donne dans ce cas :

$$s_2 = \langle s_1(t) \rangle = \langle ku^2(t) \rangle = k \langle u^2(t) \rangle.$$

L'AO utilisé dans la chaîne de traitement possède une réaction négative assurée par le circuit multiplieur (comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, tout accroissement de la tension de sortie se répercute sur l'entrée inverseuse). Il fonctionne donc en régime linéaire.

Au niveau des entrées de l'AO, nous avons :

$$e_- = ks_3^2 \text{ et } e_+ = s_2.$$

Comme en régime linéaire $e_- = e_+$, il vient :

$$ks_3^2 = s_2, \text{ donc : } s_3 = \pm \sqrt{\frac{s_2}{k}}.$$

La diode permet d'imposer $s_3 > 0$, ce qui implique :

$$s_3 = \sqrt{\frac{s_2}{k}} = \sqrt{\frac{k \langle u^2(t) \rangle}{k}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}.$$

Le signal s_3 est donc une tension continue qui représente la **valeur efficace de la tension $u(t)$** .

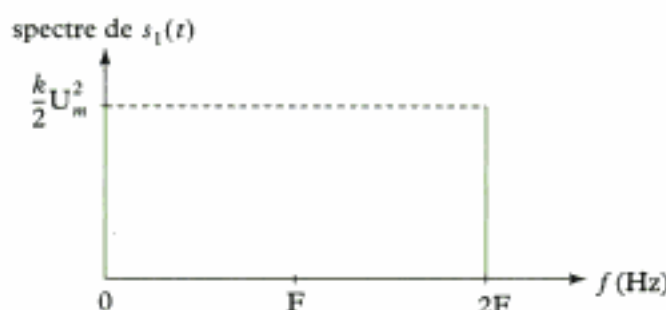
Remarque : cette chaîne de traitement est utilisée dans les multimètre spécifiés « RMS ».

2) – Comme le signal $u(t) = U_m \cos(2\pi Ft)$ est sinusoïdal de fréquence F, nous avons :

$$s_1(t) = ku^2(t) = kU_m^2 \cos^2(2\pi Ft) = kU_m^2 \frac{\cos(2\pi \times 2Ft) + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow s_1(t) = \frac{k}{2}U_m^2 + \frac{k}{2}U_m^2 \cos(2\pi \times 2Ft),$$

ce qui donne le spectre suivant :



3) Si $F = 20 \text{ Hz}$, alors le filtre doit éliminer la composante de fréquence $2F = 40 \text{ Hz}$. Soit f_c la fréquence de coupure du filtre, la condition suivante doit être alors respectée :

$$\begin{aligned} f_c \ll 2F &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi RC} \ll 2F \\ &\Leftrightarrow RC \gg \frac{1}{2\pi \times 2F} \\ &\Leftrightarrow RC \gg \frac{1}{2\pi \times 40} = 3,9 \text{ ms} \end{aligned}$$

Remarque : RC représente la constante de temps du circuit, elle ne doit pas être trop élevée pour ne pas pénaliser le temps de réponse de la chaîne.

En prenant par exemple $R = 6,8 \text{ k}\Omega$ et $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$, nous avons : $RC = 0,32 \text{ s} \gg 3,9 \text{ ms}$, tout en ayant un temps de réponse à 1 % qui vaut : $5\tau = 5RC = 1,6 \text{ s}$.

Exercice 3

1) Les propriétés des circuits multiplieurs conduisent à :

$$u' = ku_0u_3 \text{ et } u_1 = ku_0u'_0.$$

Comme les multiplieurs sont parfaits, leurs courants d'entrée sont nuls. Nous pouvons ainsi exprimer simplement la tension u'_0 en utilisant le théorème de Millman :

$$u'_0 = \frac{\frac{u_0}{R_e} + \frac{u'}{R_x}}{\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_x}} = \frac{R_x}{R_e + R_x}u_0 + \frac{R_e}{R_e + R_x}u'.$$

Nous pouvons ainsi déduire des relations précédentes la tension u_1 en fonction de u_0 et u_3 :

$$u_1 = ku_0u'_0 = ku_0\left(\frac{R_x}{R_e + R_x}u_0 + \frac{R_e}{R_e + R_x}ku_0u_3\right)$$

$$u_1 = \frac{k}{R_e + R_x}(R_x + ku_3R_e)u_0^2$$

En utilisant l'équation instantanée de la tension u_0 , il vient :

$$u_1(t) = \frac{k}{R_e + R_x}(R_x + ku_3R_e)U_0^2\sin^2(\omega t).$$

Comme $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, nous avons :

$$u_1(t) = \frac{kU_0^2}{R_e + R_x}(R_x + ku_3R_e)\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

$$u_1(t) = \frac{kU_0^2}{2(R_e + R_x)}(R_x + ku_3R_e) - \frac{kU_0^2}{2(R_e + R_x)}(R_x + ku_3R_e)\cos(2\omega t)$$

Le premier terme est un terme constant, car u_3 est constant, et le deuxième terme est sinusoïdal de pulsation 2ω .

2) Le filtre F_2 étant parfait, le deuxième terme de $u_1(t)$ est éliminé par filtrage. Le premier terme, quant à lui, est amplifié d'un facteur de 1. Nous avons ainsi :

$$u_2(t) = \frac{kU_0^2}{2(R_e + R_x)}(R_x + ku_3R_e)$$

3) Pour la fonction F_3 , l'AO, considéré parfait, fonctionne en régime linéaire, ce qui implique :

$$e_- = e_+ = 0.$$

Les courants dans R et dans C s'expriment par :

$$i_R = \frac{u_2}{R} \text{ et } i_C = C\frac{du_3}{dt}.$$

La loi des nœuds appliquée sur l'entrée inverseuse de l'AO donne :

$$i_R + i_C = i_- = 0 \text{ (AO parfait), d'où : } \frac{u_2}{R} + C\frac{du_3}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{du_3}{dt} = -\frac{u_2}{RC}$$

Le circuit F_3 est un **montage intégrateur non inverseur** car $u_3(t)$ est une primitive de $u_2(t)$.

4) En utilisant les relations obtenues dans les deux questions précédentes, nous pouvons écrire :

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{RC}\frac{kU_0^2}{2(R_e + R_x)}(R_x + kR_eu_3(t))$$

Hidden page

Hidden page

Le quadripôle RC qui suit le circuit multiplieur est un **filtre passe-bas**. Si sa fréquence de coupure est très inférieure à la fréquence $2f$, il permettra **d'éliminer par filtrage l'harmonique de fréquence $2f$** . Il ne subsistera alors ici en sortie que la composante continue $\frac{k}{2}E_1E_2\cos\varphi$.

Ici, avec $R = 1\text{ M}\Omega$, et $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, la fréquence de coupure du filtre vaut :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times 1 \cdot 10^6 \times 1 \cdot 10^{-6}} = 0,16\text{ Hz}.$$

Cette fréquence est très inférieure à la fréquence $2f = 2 \times 608 = 1\,216\text{ Hz}$, donc l'harmonique de fréquence $2f$ sera considérablement atténué et en pratique éliminé. On a alors :

$$v_s(t) = \frac{k}{2}E_1E_2\cos\varphi \quad (\text{tension continue})$$

2) • Pour $x_1(t) = x_2(t) = v_1(t)$, avec la même démarche que précédemment, on peut montrer que la tension $v_s(t)$ s'écrit :

$$v_s(t) = \frac{k}{2}E_1^2 = V_{s1}$$

(on pose $E_2 = E_1$ et $\varphi = 0$ dans la formule précédente). Ce qui nous donne :

$$E_1 = \sqrt{\frac{2V_{s1}}{k}}.$$

• De même, pour $x_1(t) = x_2(t) = v_2(t)$:

$$v_s(t) = \frac{k}{2}E_2^2 = V_{s2}.$$

Ce qui nous donne :

$$E_2 = \sqrt{\frac{2V_{s2}}{k}}.$$

• Pour $x_1(t) = v_1(t)$ et $x_2(t) = v_2(t)$, on a montré que la tension $v_s(t)$ s'écrit :

$$v_s(t) = \frac{k}{2}E_1E_2\cos\varphi = V_{s3}.$$

Ce qui nous donne :

$$|\varphi| = \text{Arccos}\left(\frac{2V_{s3}}{kE_1E_2}\right).$$

En remplaçant E_1 et E_2 par les expressions trouvées précédemment, nous obtenons :

$$|\varphi| = \text{Arccos}\left(\frac{2V_{s3}}{k\sqrt{\frac{2V_{s1}}{k}}\sqrt{\frac{2V_{s2}}{k}}}\right)$$

$$|\varphi| = \text{Arccos}\left(\frac{V_{s3}}{\sqrt{V_{s1}V_{s2}}}\right)$$

Conclusion : la mesure des tensions V_{s1} , V_{s2} et V_{s3} permet bien d'accéder à la valeur de φ .

A.N. :
$$|\varphi| = \text{Arccos}\left(\frac{4,6}{\sqrt{21,2 \times 21,1}}\right) = 77,4^\circ.$$

Exercices de niveau 3

Exercice 6

1) Recherchons dans un premier temps la décomposition spectrale du signal $w(t)$:

$$\begin{aligned} w(t) &= ku(t)e(t) = ku_0 \cos(\omega t) [E \cos(\omega t + \varphi) + b(t)] \\ &= ku_0 \cos(\omega t) E \cos(\omega t + \varphi) + kU_0 \cos(\omega t) b(t) \\ &= \frac{k}{2} U_0 E [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)] + \frac{k}{2} U_0 \cos(\omega t) b(t). \end{aligned}$$

Nous pouvons constater ici que le signal de sortie du multiplieur $w(t)$ est la somme de trois termes différents :

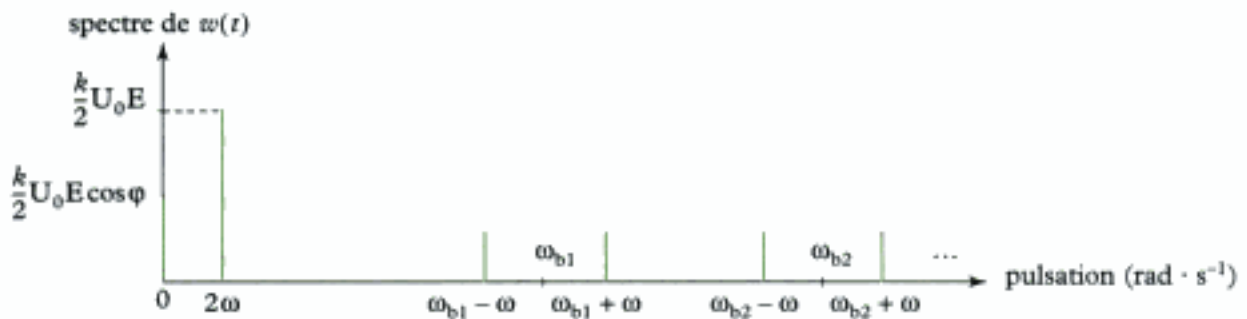
- une composante continue qui vaut $\frac{k}{2} U_0 E \cos(\varphi)$;
- un signal sinusoïdal d'amplitude $\frac{k}{2} U_0 E$ et de pulsation 2ω ;
- un signal dû au bruit, et qui s'exprime par le produit $\frac{k}{2} U_0 \cos(\omega t) b(t)$.

Si $b(t)$ se décompose en une somme harmonique avec des pulsations $\omega_{b1}, \omega_{b2}, \dots$ (avec $\omega_{bi} \gg \omega$ quel que soit i), alors les composantes de ce signal auront pour pulsations :

$$\omega_{b1} - \omega, \omega_{b1} + \omega, \omega_{b2} - \omega, \omega_{b2} + \omega, \dots$$

d'après les propriétés de la multiplication des signaux vues en cours au paragraphe E.

Nous pouvons alors représenter le spectre de $w(t)$:



Pour que le signal de sortie soit continu, il faut éliminer par filtrage tous les harmoniques.

De plus, la composante de pulsation 2ω doit être considérablement atténuée, donc nous devons avoir ω_c **très inférieure** à 2ω . *A fortiori*, les harmoniques dûs au bruit, ayant une pulsation bien supérieure à 2ω , seront très fortement atténués par le filtre passe-bas.

Dans ce cas, seule subsistera, en sortie du filtre, la composante continue de $w(t)$. Nous aurons donc alors :

$$W_f = \frac{k}{2} U_0 E \cos(\varphi).$$

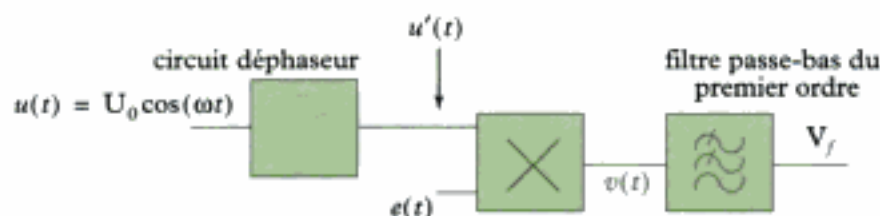
Une mesure de W_f permet donc d'accéder à $E \cos(\varphi) = \frac{2W_f}{kU_0}$, mais **ne nous permet pas d'obtenir séparément l'amplitude E de $e(t)$ et sa phase φ .**

2) Le signal $e(t)$ s'écrit (sans le bruit $b(t)$ que l'on éliminera par filtrage) :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi) = E \cos(\varphi) \cos(\omega t) - E \sin(\varphi) \sin(\omega t).$$

Nous voyons ici un terme en $\cos(\omega t)$, d'amplitude $E \cos(\varphi)$ obtenue grâce au montage précédent, et un terme en $-\sin(\omega t)$ d'amplitude $E \sin(\varphi)$.

La deuxième composante est le terme dit « en quadrature de phase ». On peut obtenir son amplitude par le circuit suivant :



avec
$$u'(t) = -U_0 \sin(\omega t) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le circuit déphaseur doit déphaser $u(t)$ d'un angle de $\frac{\pi}{2}$.

Le signal $v(t)$ s'exprime (en négligeant le bruit de $e(t)$ dont l'effet produit est de toute manière éliminé par filtrage) :

$$v(t) = k u'(t) e(t) = -k U_0 \sin(\omega t) E \cos(\omega t + \varphi).$$

En utilisant la formule de transformation :

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)],$$

il vient :

$$v(t) = -\frac{k}{2} \{ U_0 E [\sin(-\varphi) + \sin(2\omega t + \varphi)] \} = \frac{k}{2} U_0 E \sin(\varphi) - \frac{k}{2} U_0 E \sin(2\omega t + \varphi).$$

En choisissant une pulsation de coupure ω_c du filtre passe-bas qui soit très inférieure à la pulsation 2ω , on peut éliminer le deuxième terme par filtrage. On aura ainsi en sortie du filtre :

$$V_f = \frac{k}{2} U_0 E \sin(\varphi).$$

Cette tension continue nous permet ainsi, à partir de la tension W_f , de déterminer l'amplitude E et la phase φ :

$$E \sin(\varphi) = \frac{2V_f}{kU_0} \quad \text{et} \quad E \cos(\varphi) = \frac{2W_f}{kU_0},$$

$$\text{donc : } E = \sqrt{E^2 \cos^2(\varphi) + E^2 \sin^2(\varphi)} = \sqrt{\frac{2^2 W_f^2}{k^2 U_0^2} + \frac{2^2 V_f^2}{k^2 U_0^2}}.$$

$$E = \frac{2}{kU_0} \sqrt{W_f^2 + V_f^2}$$

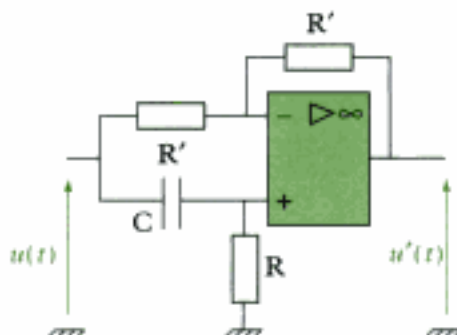
Par ailleurs, $\tan(\varphi) = \frac{E \sin(\varphi)}{E \cos(\varphi)} = \frac{V_f}{W_f}$, d'où :

$$\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{V_f}{W_f}\right)$$

Conclusion :

Nous avons pu déterminer, grâce au circuit proposé, la composante en quadrature de $e(t)$, de valeur $\frac{2V_f}{kU_0}$. En combinant les mesures de W_f et V_f , nous pouvons alors déterminer l'amplitude E de $e(t)$ et sa phase φ .

3) Le bloc fonctionnel défini précédemment est un circuit déphaseur. Ce circuit doit déphaser le signal sans modifier son amplitude. Le circuit ci-dessous permet de réaliser une telle fonction :



Le déphasage θ produit par ce montage vaut :

$$\theta = \pi - 2\text{Arctan}(RC\omega) = \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad RC\omega = 1.$$

4) Si la pulsation de coupure du filtre est choisie très basse, l'avantage sera d'avoir un **bon filtrage**, et il n'y aura pratiquement plus de trace des harmoniques que nous souhaitons éliminer.

Cependant, nous avons :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{2\pi f_c}, \text{ avec } \tau \text{ constante de temps du circuit RC.}$$

Le filtre aura donc comme inconvénient, si f_c est trop basse, d'avoir un **temps de réponse élevé**.

Exercice 7

1) Le signal en sortie du multiplieur s'écrit :

$$kv_m(t)v_p(t) \Rightarrow v(t) = kv_m(t)v_p(t) + v_p(t) = v_p(t)(1 + kv_m(t)) \\ \Rightarrow v(t) = V_p[1 + kV_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t).$$

Par identification avec la forme proposée $v(t) = V_p[1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t)$, l'indice de modulation s'écrit donc :

$$m = kV_m$$

2) Dans l'expression précédente de $v(t)$, nous pouvons voir que l'amplitude des oscillations de fréquence f_p est définie à chaque instant par :

$$V_p[1 + m \cos(\omega_m t)],$$

cette fonction étant maximale lorsque $\cos(\omega_m t) = 1$ et minimale pour $\cos(\omega_m t) = -1$. Ainsi :

$$V_2 = V_p(1 + m) \quad \text{et} \quad V_1 = V_p(1 - m).$$

Ce qui implique :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + m}{1 - m} \Leftrightarrow V_2(1 - m) = V_1(1 + m)$$

$$m = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}$$

$$\text{A.N. : } m = \frac{18 - 2}{18 + 2} = 0,8 = 80 \, \%.$$

$$3) \quad v(t) = V_p[1 + m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t) = V_p \cos(\omega_p t) + mV_p \cos(\omega_p t) \cos(\omega_m t)$$

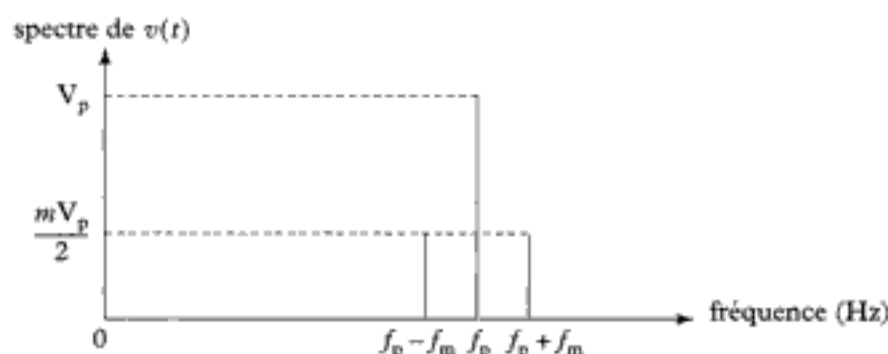
$$\text{soit : } v(t) = V_p \cos(\omega_p t) + \frac{mV_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m)t] + \frac{mV_p}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m)t].$$

Le signal $v(t)$ est ainsi la somme de trois termes différents, tous trois sinusoïdaux en fonction du temps, tels que :

- le premier terme a pour amplitude V_p et pour pulsation ω_p , donc une fréquence f_p ;
- le deuxième terme a pour amplitude $\frac{mV_p}{2}$ et pour pulsation $\omega_p + \omega_m$, donc une fréquence $f_p + f_m$;
- le troisième terme a pour amplitude $\frac{mV_p}{2}$ et pour pulsation $\omega_p - \omega_m$, donc une fréquence $f_p - f_m$.

Nous pouvons ainsi représenter l'allure du spectre du signal $v(t)$ sachant que :

$$f_m \ll f_p \text{ et } m < 1.$$



Nous constatons sur le graphique que la largeur du spectre Δf nécessaire pour transporter ce signal vaut :

$$\Delta f = (f_p + f_m) - (f_p - f_m), \text{ soit : } \boxed{\Delta f = 2f_m}$$

4) R_a désigne la résistance de l'antenne. En l'absence de modulation, le signal émis est sinusoïdal, donc la puissance rayonnée s'exprime par :

$$P = \frac{1}{R_a} \left(\frac{V_p}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{V_p^2}{2R_a}.$$

En présence de modulation ($m \neq 0$), le signal comprend trois harmoniques. La puissance rayonnée totale est alors la somme de la puissance rayonnée par chaque harmonique :

$$P_t = \frac{V_p^2}{2R_a} + \frac{\left(\frac{mV_p}{2} \right)^2}{2R_a} + \frac{\left(\frac{mV_p}{2} \right)^2}{2R_a} = \frac{V_p^2}{2R_a} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right),$$

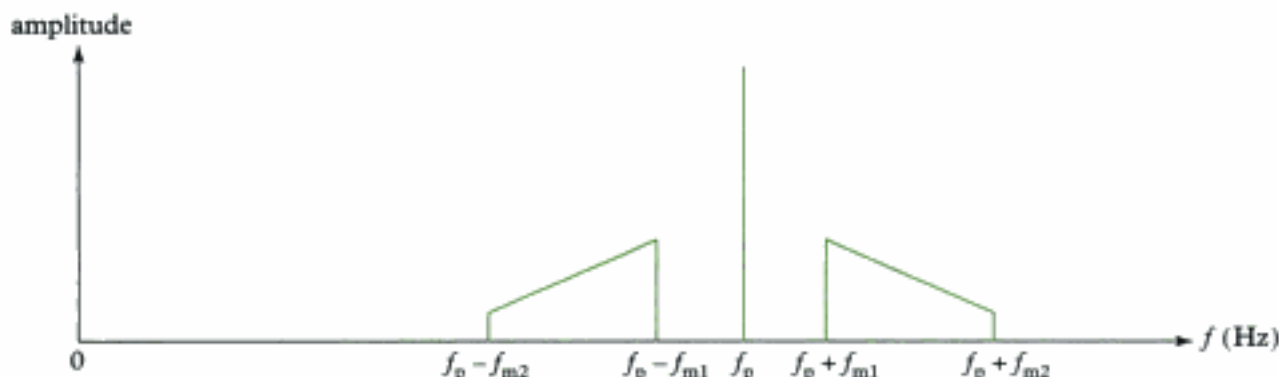
ce qui implique :

$$\boxed{P_t = \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) P}$$

$$A.N. : P_t = \left(1 + \frac{0,8^2}{2} \right) \times 2\,100 = 2\,772 \text{ kW}.$$

5) Comme nous l'avons montré dans la question 3), chaque harmonique de fréquence f du signal modulant apportera dans le signal modulé deux harmoniques, un de fréquence $f_p + f$ et un autre de fréquence $f_p - f$.

Le spectre du signal modulé a donc l'allure suivante :



Nous pouvons constater à présent, par lecture graphique, que la plage de fréquence du signal modulé vaut :

$$\Delta f = (f_p + f_{m2}) - (f_p - f_{m2}) = 2f_{m2}.$$

A.N. : $\Delta f = 2 \times 4,5 = 9 \text{ kHz}$.

Pour que deux émissions de fréquences f_p et f_p' (avec $f_p' > f_p$) ne soient pas mutuellement brouillées, il faut avoir :

$$f_p + f_{m2} < f_p' - f_{m2} \Leftrightarrow f_p' - f_p > 2f_{m2} \Leftrightarrow f_p' - f_p > \Delta f$$

$$\Delta f_{\min} = \Delta f = 9 \text{ kHz}$$

Exercice 8

1) Exprimons tout d'abord $u(t)$:

$$u(t) = k v'(t) v_0(t) = k V_p' [1 + m' \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t) V_0 \cos(\omega_p t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) = k V_p' V_0 [1 + m' \cos(\omega_m t)] \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_p t)]$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 [1 + m' \cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_p t) + m' \cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t)]$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 \left[1 + m' \cos(\omega_m t) + \cos(2\omega_p t) + \frac{m'}{2} \cos[(2\omega_p - \omega_m)t] + \frac{m'}{2} \cos[(2\omega_p + \omega_m)t] \right]$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) + \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(2\omega_p t) + \frac{k}{2} V_p' V_0 \frac{m'}{2} \cos[(2\omega_p - \omega_m)t] + \frac{k}{2} V_p' V_0 \frac{m'}{2} \cos[(2\omega_p + \omega_m)t].$$

• Les trois derniers termes ont une fréquence supérieure à f_p , ils sont donc éliminés par le filtre passe-bas F_1 , considéré idéal.

Les deux premiers termes sont transmis par le filtre F_1 avec une amplification $K_1 = 1$ car ils ont une fréquence inférieure à f_p .

Le signal de sortie du filtre F_1 s'exprime donc selon :

$$u'(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t).$$

• Le premier terme est continu, il est donc éliminé par le filtre F_2 . Le deuxième terme ayant une fréquence f_m , l'amplification de F_2 pour cette fréquence vaut $K_2 = 1$.

Nous avons ainsi :

$$v_d(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t)$$

2) U est la composante continue de $u'(t)$, elle vaut :

$$U = u'(t) - v_d(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0.$$

La constante de multiplication k étant connue, de même que V_0 , l'amplitude de $v_0(t)$, U est l'image de l'amplitude V_p' , qui doit rester constante. U apporte l'information permettant de **réguler le gain de l'amplificateur à CAG**.

3) Établissons tout d'abord la nouvelle expression de $u(t)$:

$$u(t) = k v'(t) v_0'(t) = k V_p' [1 + m' \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_p t) V_0 \cos(\omega_p t + \varphi_0(t))$$

$$\Leftrightarrow u(t) = k V_p' V_0 [1 + m' \cos(\omega_m t)] \frac{1}{2} [\cos(\varphi_0(t)) + \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t))]$$

$$\Leftrightarrow u'(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 [1 + m' \cos(\omega_m t)] \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t)).$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t)).$$

Le premier terme, de pulsation $\frac{d\varphi_0}{dt}$ très inférieure à ω_p , est éliminé par F_2 les troisième et quatrième termes représentant des harmoniques de pulsations toujours proches de $2\omega_p$ sont éliminés par le filtre F_1 . Seul subsistera donc en sortie le deuxième terme, soit :

$$v_d'(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\varphi_0(t)) \cos(\omega_m t)$$

L'amplitude de ce signal vaut :

$$\frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\varphi_0(t))$$

Elle dépend de $\varphi_0(t)$, fonction qui varie aléatoirement au cours du temps.

4) Comme nous l'avons montré dans la question précédente, $u'(t)$ s'écrit :

$$u'(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(2\omega_p t + \varphi_0(t)).$$

Le filtre F_3 élimine toutes les fréquences supérieures à f_p , donc $v_c(t)$ s'exprime par :

$$v_c(t) = \frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(\varphi_0(t)).$$

Nous avons d'autre part :

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = a v_c(t) = a \left[\frac{k}{2} V_p' V_0 \cos(\varphi_0(t)) + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \cos(\varphi_0(t)) \right].$$

$\varphi_0(t)$ vérifie ainsi l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = a \left[\frac{k}{2} V_p' V_0 + \frac{k}{2} V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t) \right] \cos(\varphi_0(t))$$

5) L'équation différentielle de $\varphi_0(t)$ peut aussi s'écrire :

$$\frac{d\varphi_0}{\cos(\varphi_0(t))} = a\left(\frac{k}{2}V_p' V_0 + \frac{k}{2}V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t)\right) dt,$$

équation que nous pouvons intégrer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi_0}{\cos(\varphi_0(t))} &= \int a\left(\frac{k}{2}V_p' V_0 + \frac{k}{2}V_p' V_0 m' \cos(\omega_m t)\right) dt \\ \Leftrightarrow \ln \left| \tan\left(\frac{\varphi_0(t)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| &= a\frac{k}{2}V_p' V_0 t + a\frac{k}{2}V_p' V_0 m' \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t) + C \end{aligned}$$

où C est une constante d'intégration.

$$\Leftrightarrow \left| \tan\left(\frac{\varphi_0(t)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| = \exp\left(a\frac{k}{2}V_p' V_0 t + a\frac{k}{2}V_p' V_0 m' \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t)\right) + C.$$

Posons $A = e^C$. Il vient :

$$\begin{aligned} \left| \tan\left(\frac{\varphi_0(t)}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| &= A \exp\left(a\frac{k}{2}V_p' V_0 t + a\frac{k}{2}V_p' V_0 m' \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\varphi_0(t)}{2} + \frac{\pi}{4} &= \text{Arctan}\left[\pm A \exp\left(a\frac{k}{2}V_p' V_0 t + a\frac{k}{2}V_p' V_0 m' \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t)\right)\right] \\ \Leftrightarrow \varphi_0(t) &= 2\text{Arctan}\left[\pm A \exp\left(a\frac{k}{2}V_p' V_0 t + a\frac{k}{2}V_p' V_0 m' \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t)\right)\right] - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons constater que lorsque t tend vers l'infini, $\varphi_0(t)$ tend vers $\pm\pi - \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\varphi_0(\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \varphi_0(\infty) = -3\frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Au bout d'un temps infini, la boucle se verrouille car $\varphi_0(\infty)$ atteint la **valeur constante** $\frac{\pi}{2}$.

6) Pour effectuer la démodulation synchrone, nous avons besoin du signal $v_0(t) = V_0 \cos(\omega_p t)$. Or avec la boucle à verrouillage de phase que nous venons d'étudier, nous avons produit un signal :

$$v_0'(t) = V_0 \cos(\omega_p t + \varphi_0(t)) = V_0 \cos\left(\omega_p t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le rôle du circuit déphaseur est de déphaser le signal $v_0'(t)$ d'un angle de $-\frac{\pi}{2}$ de manière à produire un signal $v_0''(t) = V_0 \cos \omega_p t = v_0(t)$ synchrone avec $v_p'(t)$, que l'on peut utiliser pour effectuer la démodulation synchrone.

Nous pouvons remarquer d'autre part que le signal démodulé s'exprimant par :

$$v_d'(t) = \frac{k}{2}V_p' V_0 m' \cos(\varphi_0(t)) \cos(\omega_m t),$$

son amplitude est maximale pour un déphasage $\varphi_0(t) = 0$, ce que réalise $v_0''(t)$.

Index

A

- Amplificateur opérationnel (AO), 68
 - idéal, 75
- Amplificateur
 - inverseur, 82
 - non-inverseur, 80
 - différentiel, 85
- Amplitude, 7
- Analyse spectrale, 12
- Astable, 307

B

- Bande passante, 19, 209
 - largeur, 139
- Barkhausen (condition de), 239
- Bruit électronique, 301
- Boucle fermée, 238
 - structure de, 238

C

- Caractère
 - dérivateur d'un filtre passe-haut du premier ordre, 135
 - dérivateur et intégrateur d'un filtre passe-bande du second ordre, 144
- Chaîne
 - directe, 194
 - de retour, 195
- Coefficient d'amortissement, 45
- Comparateur, 195, 298
 - à hystérésis, 301
 - à deux seuils, 304
 - analogique, 298
 - montage, 299
 - simple, 301
- Composante continue, 10
- Contrôle
 - de la fréquence, 311
 - de l'amplitude, 313

D

- Déphaseur, 94
- Dérivateur, 87
- Détection synchrone, 356, 365

- Diagramme de Bode, 18
 - asymptotique, 18
- Distorsion de phase, 178

E

- Effets
 - d'un filtre passe-bande, 144
 - d'un filtre passe-bas, 132
 - d'un filtre passe-haut, 137

F

- Facteur de qualité, 129
- Facteur d'amortissement, 129
- Filtrage, 16
- Filtre
 - actif, 125
 - à condensateurs commutés, 125
 - coupe-bande, 125, 144
 - du premier ordre fondamental, 43
 - du deuxième ordre fondamental, 46
 - linéaire, 16
 - passe-bande, 124
 - du deuxième ordre, 20, 138
 - passe-bas, 124
 - du premier ordre, 125
 - du deuxième ordre, 19, 129
 - passe-haut, 124
 - du premier ordre, 133
 - passif, 125
 - réjecteur de fréquences, 153
- Fréquence, 10
- Fonction
 - addition, 83
 - amplification, 76
 - dérivation, 86
 - intégration, 91
 - de transfert, 146
 - de transfert harmonique, 14
 - multiplication, 344
 - soustraction, 85
- Fondamental, 11
- Fourier
 - théorème de, 10
 - spectre de, 12

H

- Harmonique d'ordre n , 11
- Horloge, 313

I

Intégrateur, 91
Intégrateur vrai, 310

L

Laplace,
– transformation de, 21
– notation de, 198

M

Mémoire, 303
– effet, 302
Modèle électrique équivalent de l'A0, 74
Modulation d'amplitude, 354
Multiplieur, 344, 364

P

Période, 10
Phase, 7
Pulsation, 7
– de coupure, 19
– propre, 45

O

Ordre
– d'un filtre, 15
Oscillateur, 236
– à pont de Wien, 242
– fonctionnement de, 245
– non saturé, 272
– à quartz, 261, 275
– à réaction, 241
– schéma général, 241
– à relaxation (multivibrateur), 298
– à réseau déphaseur, 251, 273
– à résistance négative, 253
– Colpitts, 274

– haute fréquence, 259
– quasi sinusoïdal, 236

Oscillations, 238

R

Rapport cyclique, 311
Réaction
– positive, 69
– négative, 70
Représentation fréquentielle, 12

S

Schéma-bloc, 198
Signaux sinusoïdaux
– réalisation par filtrage, 316
Slew rate, 72
Sommateur
– inverseur, 83
– non-inverseur, 84
Suiveur, 77
Synthèse d'un créneau, 13
Système
– asservi, 194
– bouclé, 194

T

Tension, 7
Transmittance, 197, 215
– en boucle ouverte, 199
– en boucle fermée, 200

V

Valeur
– efficace, 10
– moyenne, 10
Vitesse de balayage, 72

Hidden page

Hidden page

Hidden page



**Titres disponibles en deuxième année
dans la filière PSI...**

En Mathématiques

Analyse PSI
Algèbre et géométrie PSI

En Chimie

Chimie PSI

Livres d'exercices

Mathématiques PSI
Physique PSI

En Physique

Optique MP-PC-PSI-PT
Électromagnétisme PC-PSI
Physique des ondes PC-PSI
Thermodynamique PC-PSI
Mécanique des fluides PC-PSI
Électrotechnique PSI
Électronique PSI

LES NOUVEAUX Précis BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont la **collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0361

ISBN : 2 7495 0399 X

www.editions-breial.fr



Copyrighted material